Nouvelles annales de mathématiques

Malo

Solution de la question de mathématiques proposée au concours d'admission à l'École normale supérieure en 1891

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 75-77

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__75_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1891 (¹);

PAR M. LE CAPITAINE MALO.

La première partie de l'énoncé est un corollaire immédiat de la proposition plus générale : *Deux points* P, Q *d'une conique, et le pôle* M *de la droite* PQ *par rapport à cette conique, sont sur une même conique avec tout système analogue* P'Q'M' (²), et il suffit de faire l'hypothèse particulière que les points P'Q' ont été pris sur le cercle déterminé par le triangle MPQ. Quant à la proposition générale, elle est fondée sur ce fait que la droite de Pascal, relative à l'hexagone MPP'M'Q'Q, est obtenue par les constructions même qui donnent la polaire par rapport à la conique du point d'intersection I' des

(¹) Voir l'énoncé, t. X, p. 311; 1891.

(²) Plus généralement encore : *Les sommets de deux triangles autopolaires par rapport à une conique sont sur une même conique; les côtés sont tangents à une même conique.*

droites PQ', $P'Q$. La dernière partie de l'énoncé aussi est immédiatement vérifiée en raison de ce qui précède, car elle revient à dire que les points I' et I'' sont conjugués par rapport aux points M et M', proposition qui vient d'être acquise, quelle que soit la nature de la conique $MPP'M'Q'Q$.

Pour établir que les points $FF'MM'$ sont sur un même cercle, le plus court est peut-être de ne pas chercher à tirer directement cette conséquence des constructions de l'énoncé, et d'autres qui peuvent s'en conclure, mais d'examiner d'une façon générale la nature de la correspondance entre les points M et M', laquelle est évidemment unique et réciproque (c'est-à-dire rationnelle), et d'achever de caractériser cette correspondance par l'étude de ses points exceptionnels, c'est-à-dire d'une part ceux pour lesquels le point M' coïncide avec M, et de l'autre, ceux pour lesquels ce point est indéterminé sur une certaine courbe algébrique dont l'ordre est principalement à reconnaître. Or, en premier lieu, si M et M' coïncident, $\overline{PQ}$ et $\overline{P'Q'}$ coïncident aussi : donc P, Q sont les points de contact avec la conique d'un cercle bitangent et contenant le point M, c'est-à-dire d'un cercle évanouissant; les points M en question sont donc les quatre foyers, réels et imaginaires, de la conique considérée. En second lieu, il est clair que, si M vient en O, centre de la conique, PQ passe à l'infini, et, par suite, le cercle OPQ se décompose en deux droites, PQ, qui contient quatre points du lieu (P, Q et les points cycliques ω, ω'), et une droite indéterminée passant par O : le pôle M' de cette droite est donc lui-même indéterminé à l'infini.

Un raisonnement analogue, quoique un peu plus abstrait, en raison de l'imaginarité de presque tous les éléments, montre que les points cycliques ω et ω' sont deux autres positions de M pour lesquelles M' est indéterminé sur les droites $O\omega$ et $O\omega'$, respectivement.

Tout cela caractérise la transformation particulière du second degré dans laquelle un couple de points MM' se présentent comme conjugués par rapport à toutes les hyperboles équilatères construites sur un diamètre fixe (ici la droite F'F joignant les foyers de la conique donnée), et qui est caractérisée par la relation métrique $\overline{OM}.\overline{OM'} = \overline{OF}^2$, les droites OM, OM' étant symétriques par rapport à OF. Dès lors, si l'on mène par M' deux droites, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à OF, jusqu'à leurs rencontres avec OM, en m et μ, on voit que les points M, m et les foyers réels de la conique d'une part, M, μ et les foyers imaginaires d'autre part, sont situés sur deux cercles, qui, en raison de la symétrie par rapport à l'axe OF, pour le premier, et à l'axe perpendiculaire, pour le second, passent nécessairement par M'.

Cela établi, tout le reste est facile, car, les droites OM, OM' étant toujours également inclinées sur OF, M' est invariable du moment que FF' et M le sont, ce qui est l'hypothèse. Alors les points I', I'' sont sur la droite fixe $\overline{MM'}$, qu'ils divisent harmoniquement, et, quant au point I, étant le pôle d'une droite fixe par rapport à une série de coniques confocales (cas particulier du faisceau tangentiel de coniques), il décrit, comme on sait, une autre droite.