MAURICE D'OCAGNE

Sur la corrélation entre les systèmes de coordonnées ponctuelles et les systèmes de coordonnées tangentielles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 70-75

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__70_1>

SUR LA CORRÉLATION ENTRE LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES PONCTUELLES ET LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES TANGENTIELLES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Un intéressant article ([1]) de M. Casorati, dont la traduction a paru dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. XVII, p. 5), contient les lignes suivantes :

« Ces deux systèmes de coordonnées (le système cartésien et le système plückérien) ne donnent pas toujours des formules correspondantes de même nature analytique, et l'on en conclut que les coordonnées cartésiennes ne peuvent se concilier entièrement avec le principe de la dualité. Il me semble que cette conclusion n'est pas licite et que le fait qui y donne lieu ne prouve qu'une chose, c'est que les coordonnées plückériennes ne sont pas en corrélation parfaite avec les coordonnées cartésiennes. »

Transformant, dès lors, suivant la loi de la dualité judicieusement interprétée, la conception ordinaire des

([1]) Cet article a paru en 1877 dans les *Comptes rendus de l'Institut lombard*.

coordonnées cartésiennes, l'auteur obtient un système de coordonnées tangentielles qui ne sont autres que celles dont, sous le nom de *coordonnées parallèles,* nous avons ici même développé la théorie (3[e] série, t. III et IV).

On sait qu'indépendamment de la nôtre, et simultanément avec elle, une autre théorie des coordonnées parallèles a été publiée en Allemagne par M. K. Schwering [1] qui, dans des écrits partiels, s'était déjà occupé du sujet à plusieurs reprises [2].

M. Schlegel, dont l'attention avait été attirée sur ce sujet par les recherches de M. Schwering avait, de son côté, remarqué la parfaite corrélation des coordonnées parallèles avec les coordonnées cartésiennes (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XXIII).

Celle-ci a encore été mise en lumière, dans un ordre d'idées plus pratique, par le lien que, dans le Chapitre IV de notre *Nomographie* [3], nous avons établi entre nos *abaques à points isoplèthes* et les *abaques à droites isoplèthes* de M. Lalanne.

Nous nous proposons de revenir encore ici sur ce fait pour en fournir une nouvelle justification théorique propre à mettre en évidence les rapports mutuels des divers systèmes fondamentaux de coordonnées ponctuelles et tangentielles.

Envisageant d'ailleurs, pour plus de généralité, le cas

---

(1) Voir l'intéressante comparaison de ces deux théories, faite par M. Schwering lui-même dans la *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* t. XXXI, [2], p. 71.

(2) J'ai fait voir dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XVIII, p. 109) que l'idée première des coordonnées parallèles devait être attribuée à Chasles.

(3) Ouvrage paru en 1891 chez Gauthier-Villars et fils, et dont il a été rendu compte dans le numéro de décembre 1891 des *Nouvelles Annales*.

de l'espace, nous partirons du système très général ainsi défini :

Soit OABC un tétraèdre de référence.

Étant donné un point P, supposons que :

Le plan PBC coupe OA en a,
» PCA » OB » b,
» PAB » OC » c.

Nous poserons, en faisant l'hypothèse que les paramètres λ, μ, ν aient des valeurs fixes pour tous les points de l'espace, mais d'ailleurs quelconques, et que les segments soient pris avec leur signe,

$$(1) \qquad x = \lambda \frac{\mathrm{O}a}{\mathrm{A}a}, \qquad y = \mu \frac{\mathrm{O}b}{\mathrm{B}b}, \qquad z = \nu \frac{\mathrm{O}c}{\mathrm{C}c},$$

et nous dirons que x, y, z sont les coordonnées du point P.

De même, si un plan π coupe OA en α, OB en β, OC en γ, nous poserons

$$(2) \qquad u = -\frac{1}{\lambda} \frac{\mathrm{A}\alpha}{\mathrm{O}\alpha}, \qquad v = -\frac{1}{\mu} \frac{\mathrm{B}\beta}{\mathrm{O}\beta}, \qquad w = -\frac{1}{\nu} \frac{\mathrm{C}\gamma}{\mathrm{O}\gamma},$$

et nous dirons que u, v, w sont les coordonnées du plan π.

On voit que le point O et le plan ABC jouent ici des rôles symétriques; les coordonnées de l'un et de l'autre sont nulles. Nous pourrons appeler l'un le *point fondamental*, l'autre le *plan fondamental* du système considéré.

Cherchons, dans ce système, l'équation du point et du plan unis, c'est-à-dire la condition analytique qui doit lier les coordonnées x, y, z aux coordonnées u, v, w, pour que le point P soit dans le plan π.

A cet effet, prenons momentanément les droites OA, OB, OC comme axes cartésiens OX, OY, OZ, et désignons par **X**, **Y**, **Z** les coordonnées du point **P** dans ce système.

Puisque, par définition, le point P est à la fois dans chacun des plans aBC, AbC, ABc, on a

(3) $$\frac{X}{Oa}+\frac{Y}{OB}+\frac{Z}{OC}=1,\quad \frac{X}{OA}+\frac{Y}{Ob}+\frac{Z}{OC}=1,\quad \frac{X}{OA}+\frac{Y}{OB}+\frac{Z}{Oc}=1.$$

Mais, des égalités (1), on tire

$$\frac{Oa}{OA}=\frac{x}{x-\lambda},\qquad \frac{Ob}{OB}=\frac{y}{y-\mu},\qquad \frac{Oc}{OC}=\frac{z}{z-\nu}.$$

Les équations (3) deviennent dès lors

(4) $$\frac{\lambda X}{x\,OA}=\frac{\mu Y}{y\,OB}=\frac{\nu Z}{z\,OC}=\frac{X}{OA}+\frac{Y}{OB}+\frac{Z}{OC}-1.$$

La condition pour que le point P se trouve dans le plan π ou $\alpha\beta\gamma$ s'exprime par

(5) $$\frac{X}{O\alpha}+\frac{Y}{O\beta}+\frac{Z}{O\gamma}=1.$$

Mais les égalités (2) donnent

$$\frac{OA}{O\alpha}=\lambda u+1,\qquad \frac{OB}{O\beta}=\mu v+1,\qquad \frac{OC}{O\gamma}=\nu w+1,$$

et l'équation (5) devient

$$\lambda u\frac{X}{OA}+\mu v\frac{Y}{OB}+\nu w\frac{Z}{OC}+\frac{X}{OA}+\frac{Y}{OB}+\frac{Z}{OC}-1=0,$$

ou, en vertu des équations (4),

$$(ux+vy+wz+1)\left(\frac{X}{OA}+\frac{Y}{OB}+\frac{Z}{OC}-1\right)=0.$$

Si nous écartons le cas limite où le second facteur serait nul, c'est-à-dire où le point P serait dans le plan fondamental ABC, auquel cas les coordonnées x, y, z de P seraient infinies, nous voyons que la condition se réduit à

$$ux + vy + wz + 1 = 0. \tag{6}$$

Telle est, dans le système général de coordonnées que nous considérons, l'équation du point et du plan unis. Ce système établit donc entre les éléments point et plan le même mode de correspondance que celui qui résulte du rapprochement des systèmes cartésien et plückérien d'une part, des systèmes parallèle ponctuel (¹) et parallèle tangentiel de l'autre. Nous allons voir maintenant comment ces divers systèmes peuvent en dériver.

Imaginons d'abord que le plan fondamental ABC soit rejeté à l'infini. Pour que, dans cette hypothèse, les coordonnées d'un point quelconque ne soient pas nulles, donnons-nous d'abord pour les paramètres λ, μ, ν les valeurs

$$\lambda = -\mathrm{OA}, \qquad \mu = -\mathrm{OB}, \qquad \nu = -\mathrm{OC}.$$

Nous avons alors à la limite

$$x = \mathrm{O}a, \qquad y = \mathrm{O}b, \qquad z = \mathrm{O}c \quad \text{(coordonnées cartésiennes)},$$

$$u = -\frac{1}{\mathrm{O}\alpha}, \qquad v = -\frac{1}{\mathrm{O}\beta}, \qquad w = -\frac{1}{\mathrm{O}\gamma} \quad \text{(coordonnées plückériennes)}.$$

Corrélativement, rejetons le point fondamental O à l'infini. Ici, nous prendrons

$$\lambda = -\frac{1}{\mathrm{OA}}, \qquad \mu = -\frac{1}{\mathrm{OB}}, \qquad \nu = -\frac{1}{\mathrm{OC}},$$

et nous aurons à la limite

$$x = -\frac{1}{\mathrm{A}a}, \quad y = -\frac{1}{\mathrm{B}b}, \quad z = \frac{1}{\mathrm{C}c} \text{ (coordonnées parallèles ponctuelles)},$$

$$u = \mathrm{A}\alpha, \qquad v = \mathrm{B}\beta, \qquad z = \mathrm{C}\gamma \text{ (coordonnées parallèles tangentielles)}.$$

(¹) Nous avons défini celui-ci, au signe près des coordonnées, dans un article des *Nouvelles Annales* (3ᵉ série, t. VI, p. 493).

On voit que de l'une à l'autre de ces deux hypothèses corrélatives, il y a correspondance parfaite d'une part entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées parallèles tangentielles, de l'autre entre les coordonnées plückériennes et les coordonnées parallèles ponctuelles. Ainsi se trouve confirmé, pour la première partie, et complété, pour la seconde, par voie analytique le fait que le professeur Casorati avait déjà mis en évidence par voie synthétique dans ce Journal.