

H. LAURENT

Sur l'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 11
(1892), p. 5-7

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__5_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR L'ÉLIMINATION;
PAR M. H. LAURENT.

Je vais faire connaître une méthode d'élimination qui permet d'écrire explicitement la résultante de deux équations, sans même qu'il soit nécessaire de faire intervenir les coefficients de cette équation.

Pour former la résultante des deux équations

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0$$

des degrés m et n où $m \geq n$, on désignera par a_1, a_2, \dots, a_m des quantités numériques quelconques, on posera

$$c_{ij} = \frac{\varphi(a_j)\psi(a_i) - \varphi(a_i)\psi(a_j)}{a_j - a_i} = c_{ji},$$

$$c_{ii} = \varphi'(a_i)\psi(a_i) - \varphi(a_i)\psi'(a_i),$$

et la résultante sera

$$\Sigma \pm c_{11}c_{22} \dots c_{mm} = 0.$$

Démonstration. — Posons

$$F(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m),$$

$$\xi_i = \frac{F(x)}{F'(a_i)} \frac{1}{x - a_i}.$$

La formule d'interpolation de Lagrange donne

$$(1) \quad \frac{\varphi(x) \psi(a_i) - \psi(x) \varphi(a_i)}{x - a_i} = c_{i1} \xi_1 + c_{i2} \xi_2 + \dots + c_{im} \xi_m.$$

Si nous désignons, en général, par $G^{(j)}$ ce que devient une fonction G de x quand on remplace x par une racine x_j de $\varphi(x) = 0$, la formule (1) deviendra

$$- \frac{\psi(x_j) \varphi(a_i)}{x_j - a_i} = c_{i1} \xi_1^{(j)} + c_{i2} \xi_2^{(j)} + \dots + c_{im} \xi_m^{(j)},$$

ce qui montre que le déterminant D des quantités $\frac{\psi(x_j) \varphi(a_i)}{x_j - a_i}$ est le produit du déterminant C des quantités c_{ij} par le déterminant X des quantités $\xi_i^{(j)}$, ainsi

$$(2) \quad D = CX.$$

Or on a

$$(3) \quad \begin{cases} D = (-1)^m \psi(x_1) \psi(x_2) \dots \psi(x_m) \\ \quad \times \varphi(a_1) \varphi(a_2) \dots \varphi(a_m) \\ \quad \times \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_1 - a_i} \frac{1}{x_2 - a_i} \dots \frac{1}{x_m - a_i}, \end{cases}$$

$$(4) \quad X = \frac{F(x_1)F(x_2) \dots F(x_m)}{F'(a_1)F'(a_2) \dots F'(a_m)} \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_1 - a_i} \dots \frac{1}{x_m - a_i}$$

et

$$F(x_1)F(x_2) \dots F(x_m) = \varphi(a_1)\varphi(a_2) \dots \varphi(a_m) \frac{1}{\Lambda^m} (-1)^m,$$

Λ_m désignant le coefficient de x^m dans $\varphi(x)$; donc

$$(5) \quad C = \psi(x_1) \psi(x_2) \dots \psi(x_m) F'(a_1) F'(a_2) \dots F'(a_m) \Lambda_m.$$

$C = 0$ est donc bien la résultante.

Remarques. — 1° On a supposé que a_1, a_2, \dots étaient des nombres; si ces quantités dépendaient des

(7)

coefficients de φ et ψ , la résultante serait

$$G = 0, \\ F'(a_1)F'(a_2)\dots F'(a_m).$$

2° Les propriétés connues relatives au degré de la résultante sont évidentes sous la nouvelle forme que nous venons de faire connaître.

3° Enfin la méthode que nous venons de donner peut être généralisée et étendue à un nombre quelconque d'équations.

4° La racine commune s'obtiendra en résolvant les équations

$$c_{i1}\xi_1 + \dots + c_{im}\xi_m = 0,$$

qui sont, en général, au nombre de $m - 1$ distinctes. L'un des ξ étant connu, on en déduit x , etc.