H. LAURENT

# Sur l’élimination

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 11 (1892), p. 5-7

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__5_0>

# NOUVELLES ANNALES
DE
# MATHÉMATIQUES.


## SUR L'ÉLIMINATION;


PAR M. H. LAURENT.


Je vais faire connaître une méthode d'élimination qui permet d'écrire explicitement la résultante de deux équations, sans même qu'il soit nécessaire de faire intervenir les coefficients de cette équation.

*Pour former la résultante des deux équations*

$$\varphi(x) = 0, \qquad \psi(x) = 0$$

*des degrés $m$ et $n$ où $m \geqq n$, on désignera par $a_1$, $a_2, \ldots, a_m$ des quantités numériques quelconques, on posera*

$$c_{ij} = \frac{\varphi(a_j)\psi(a_i) - \varphi(a_i)\psi(a_j)}{a_j - a_i} = c_{ji},$$
$$c_{ii} = \varphi'(a_i)\psi(a_i) - \varphi(a_i)\psi'(a_i),$$

*et la résultante sera*

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{mm} = 0.$$

*Démonstration.* — Posons

$$F(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m),$$
$$\xi_i = \frac{F(x)}{F'(a_i)} \frac{1}{x - a_i}.$$

La formule d'interpolation de Lagrange donne

$$(1)\qquad \frac{\varphi(x)\psi(a_i) - \psi(x)\varphi(a_i)}{x - a_i} = c_{i1}\xi_1 + c_{i2}\xi_2 + \ldots + c_{im}\xi_m.$$

Si nous désignons, en général, par $G^{(j)}$ ce que devient une fonction $G$ de $x$ quand on remplace $x$ par une racine $x_j$ de $\varphi(x) = 0$, la formule (1) deviendra

$$-\frac{\psi(x_j)\varphi(a_i)}{x_j - a_i} = c_{i1}\xi_1^{(j)} + c_{i2}\xi_2^{(j)} + \ldots + c_{im}\xi_m^{(j)},$$

ce qui montre que le déterminant D des quantités $\frac{\psi(x_j)\varphi(a_i)}{x_j - a_i}$ est le produit du déterminant C des quantités $c_{ij}$ par le déterminant X des quantités $\xi_i^{(j)}$, ainsi

$$(2)\qquad \mathrm{D} = \mathrm{CX}.$$

Or on a

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{D} = (-1)^m\,&\psi(x_1)\psi(x_2)\ldots\psi(x_m) \\ &\times \varphi(a_1)\varphi(a_2)\ldots\varphi(a_m) \\ &\times \sum \pm \frac{1}{x_1 - a_1}\,\frac{1}{x_2 - a_2}\cdots\frac{1}{x_m - a_m}, \end{aligned}\right.$$

$$(4)\qquad \mathrm{X} = \frac{\mathrm{F}(x_1)\mathrm{F}(x_2)\ldots\mathrm{F}(x_m)}{\mathrm{F}'(a_1)\mathrm{F}'(a_2)\ldots\mathrm{F}'(a_m)}\sum \pm \frac{1}{x_1 - a_1}\cdots\frac{1}{x_m - a_m}$$

et

$$\mathrm{F}(x_1)\mathrm{F}(x_2)\ldots\mathrm{F}(x_m) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)\ldots\varphi(a_m)\,\frac{1}{\mathrm{A}_m}\,(-1)^m,$$

$\mathrm{A}_m$ désignant le coefficient de $x^m$ dans $\varphi(x)$; donc

$$(5)\qquad \mathrm{C} = \psi(x_1)\psi(x_2)\ldots\psi(x_m)\,\mathrm{F}'(a_1)\,\mathrm{F}'(a_2)\ldots\mathrm{F}'(a_m)\,\mathrm{A}_m.$$

$\mathrm{C} = 0$ est donc bien la résultante.

*Remarques.* — 1° On a supposé que $a_1$, $a_2$, … étaient des nombres; si ces quantités dépendaient des coefficients de $\varphi$ et $\psi$, la résultante serait

$$C = 0,$$
$$F'(a_1)F'(a_2)\ldots F'(a_m).$$

2° Les propriétés connues relatives au degré de la résultante sont évidentes sous la nouvelle forme que nous venons de faire connaître.

3° Enfin la méthode que nous venons de donner peut être généralisée et étendue à un nombre quelconque d'équations.

4° La racine commune s'obtiendra en résolvant les équations

$$c_{i1}\xi_1 + \ldots + c_{im}\xi_m = 0,$$

qui sont, en général, au nombre de $m - 1$ distinctes. L'un des $\xi$ étant connus, on en déduit $x$, etc.