F. FARJON

Solution d'une question de géométrie donnée au concours général en 1887

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 535-537
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__535_0>

SOLUTION D'UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE DONNÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1887;

PAR M. F. FARJON.

Il s'agit de trouver la condition à laquelle doivent satisfaire deux coniques F et f pour qu'un quadrilatère puisse être à la fois circonscrit à la première et inscrit dans la seconde.

Nous nous servirons des notations de M. Salmon.

Supposons la condition réalisée et soient L, M, N les diagonales du quadrilatère, les quatre côtés seront $L \pm M \pm N$. L'équation générale des coniques inscrites est

$$\Phi = \mu^2 L^2 - \mu(L^2 + M^2 - N^2) + M^2 = 0 \text{ (1)}$$

et celle des coniques circonscrites

$$\varphi = (L + M + N)(L + M - N) \\ - \nu(L - M + N)(L - M - N) = 0.$$

Si ces deux équations comprennent les deux courbes F et f, rapportées au triangle de référence LMN, en égalant à zéro les deux discriminants de $f - \lambda F$ et de $\varphi - \lambda\Phi$, on obtiendra deux équations en λ qui devront avoir les mêmes racines.

Soient Δ_1, Δ'_1, Θ_1, Θ'_1 les invariants du système $\Phi\varphi$, Δ, Δ', Θ, Θ' ceux du système Ff, on a

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= -\mu^2(\mu - 1)^2, \\
\Delta'_1 &= -4\nu(\nu - 1), \\
\Theta_1 &= -2\mu(\mu - 1)^2(\nu - 1), \\
\Theta'_1 &= -(\mu - 1)^2(\nu - 1)^2 - 4\mu\nu:
\end{aligned}$$

(1) SALMON, trad. VAUCHERET, *Sect. con.*, § 287.

par conséquent

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\Theta}{\Delta} &= \frac{2(\nu-1)}{\mu}, \\ \frac{\Theta'}{\Delta} &= \frac{(\mu-1)^2(\nu-1)^2+4\mu\nu}{\mu^2(\mu-1)^2}, \\ \frac{\Delta'}{\Delta} &= \frac{4\nu(\nu-1)}{\mu^2(\mu-1)^2} \end{aligned}\right.$$

et en éliminant entre ces trois relations les paramètres μ et ν, on aura la condition cherchée.

On tire de la première

$$\mu = \frac{2(\nu-1)\Delta}{\Theta},$$

de la troisième

$$(\mu-1)^2 = \frac{\nu\Theta^2}{\Delta\Delta'(\nu-1)};$$

substituant dans la seconde, on trouve finalement

$$(2)\qquad 4\Delta\Theta\Theta' = \Theta^3 + 8\Delta^2\Delta'.$$

Cette condition est évidemment nécessaire, puisque, si elle n'était pas remplie, les trois relations (1) seraient incompatibles. Je dis de plus qu'elle est suffisante.

D'un point A pris sur f menons les deux tangentes à F, lesquelles rencontrent f aux points B et C. De ces points menons deux nouvelles tangentes à F, lesquelles se coupent en D; il faut prouver que, si la condition (2) est remplie, le point D est aussi sur f.

Rapportons F et f au triangle de référence LMN formé par les diagonales du quadrilatère ABCD, F prendra la forme Φ et, pour identifier f et φ, on aura cinq conditions, qui se réduisent à deux, les deux courbes ayant déjà les trois points A, B, C communs. L'équation (2) qui existe, par hypothèse, pour les deux systèmes $\Phi\varphi$ Φf permet de satisfaire à une quatrième condition. La cinquième déterminera la valeur de ν. C. Q. F. D.

Remarquons que le point A est un point quelconque de f, d'où il suit que, lorsque la condition (2) est remplie, il existe une infinité de quadrilatères circonscrits à F et inscrits à f. Poncelet a depuis longtemps établi cette propriété pour un polygone quelconque.

Application. — L'ellipse

$$F = a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

et le cercle

$$f = (x - c)^2 + y^2 - 2(a^2 + e^2) = 0 \quad ({}^1).$$

On a

$$\Delta = -a^4b^4, \qquad \Delta' = -2(a^2 + e^2),$$
$$\Theta = -4a^4b^2, \qquad \Theta' = -2a^2b^2 - 4a^4 + b^4,$$

et la condition (2) est vérifiée.