NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. D'OCAGNE

Note sur le centre de courbure des podaires et antipodaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 532-534

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__532_1>

NOTE SUR LE CENTRE DE COURBURE DES PODAIRES ET ANTIPODAIRES;

PAR M. M. D'OCAGNE.

Les quelques remarques qui suivent ont été rédigées à l'occasion d'une Note de M. Henri Pilleux, récemment parue dans les *Nouvelles Annales*, p. 384.

L'auteur de cette Note a eu la très heureuse idée de lier le centre de courbure en un point d'une courbe au centre de courbure correspondant de sa podaire par l'intermédiaire de la tangente à la podaire de la développée de la courbe.

Soient, en effet,

O le pôle;
M le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en P à la courbe (P);
I celui de la perpendiculaire abaissée du même point sur la normale en P.

On sait que MI est la normale à la podaire. Or, le point I étant le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente à la développée de (P) décrit la podaire de cette développée et, si l'on connaît le point correspondant de cette courbe, c'est-à-dire le centre de courbure γ de la courbe (P), on a, au moyen de la même construction que précédemment, la normale et, par suite, la tangente, au lieu du point I.

Le centre de courbure c de la podaire (M) est le point où MI touche son enveloppe. Il suffit d'établir une liaison géométrique entre ce point et la tangente en I pour le rattacher, d'après la remarque précédente, au centre de courbure de la courbe (P). C'est ce mode de liaison que M. Pilleux a cherché à établir.

Pour cela il a remarqué que le segment MI était constamment vu du point O sous un angle droit et il a, en se fondant sur cette condition, cherché comment le point c où MI touche son enveloppe dépendait des tangentes connues aux courbes décrites par M et par I.

Voici la construction que j'ai donnée en 1883 pour le même problème (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. II, p. 256) :

Si T *est le point de rencontre des tangentes en* M *et en* I, *les droites* OT *et* Oc *sont isogonales par rapport à l'angle* MOI (1).

Le théorème pris sous cette forme a l'avantage de s'appliquer sans aucune modification au cas où l'angle constant OMP, au lieu d'être droit, est quelconque, c'est-à-dire au cas des *podaires inclinées*, tandis que la construction de M. Pilleux se complique un peu dans ce cas.

J'ai, à l'endroit indiqué, obtenu directement le théorème en question; mais il est très facile de le déduire de la propriété du centre instantané de rotation pour le déplacement d'un angle de grandeur constante.

Considérons, en effet, un angle constant BAC dont les côtés AB et AC touchent leurs enveloppes respectivement aux points B et C. Les perpendiculaires élevées en B à AB et en C à AC se coupent au centre instantané de rotation K de la figure, et la normale au lieu de A est la droite KA. Or le cercle circonscrit au triangle ABC, cercle qui a AK pour diamètre, est tangent en A à la tangente au lieu décrit par ce point. Donc, l'angle que fait cette tangente avec AB est égal à l'angle ACB (en d'autres termes, la tangente en A est antiparallèle de BC par rapport à l'angle BAC). Transformant cette propriété par polaires réciproques, par rapport à un cercle de centre O, on obtient précisément le théorème que nous avons en vue.

(1) Également inclinées sur la bissectrice de cet angle.