NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. D'OCAGNE

Sur une classe particulière de séries

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 526-532

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__526_1>

SUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE SÉRIES;

PAR M. M. D'OCAGNE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Ayant eu tout récemment l'occasion de revenir sur l'étude des séries récurrentes dont je me suis précédemment occupé (1), j'ai remarqué dans la première de mes Notes sur ce sujet certaine inadvertance qui fausse divers résultats énoncés. J'expliquerai plus loin en quoi a

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. III, p. 65 (1884) et t. IX, p. 93 (1890).

consisté cette inadvertance. L'objet de la présente Note est de rectifier sur ce point mon étude antérieure. La matière de cette Note doit être substituée aux n^{os} 35 et 36 (§ XIV) de ma *Théorie elémentaire des series récurrentes* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3^e série, t. III, p. 21 à 23).

1. Les séries que j'ai en vue répondent à la définition suivante : chaque terme est lié à tous ceux qui le précèdent par la formule

$$(1) \qquad U_n = a_0 U_{n-1} + a_1 U_{n-2} + \ldots + a_{n-2} U_1 + a_{n-1} U_0,$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, \ldots$ étant les termes successifs d'une progression arithmétique de raison r.

J'ai fait voir, à l'endroit cité, que les termes de cette série formaient une suite récurrente de la manière suivante :

De l'expression (1) de U_n, retranchons l'expression analogue de U_{n-1}. Il vient

$$U_n - U_{n-1} = a_0 U_{n-1} + r(U_{n-2} + U_{n-3} + \ldots + U_1 + U_0).$$

De même

$$U_{n-1} - U_{n-2} = a_0 U_{n-2} + r(U_{n-3} + \ldots + U_1 + U_0).$$

Par soustraction de ces deux dernières égalités, on a

$$U_n - 2U_{n-1} + U_{n-2} = a_0 U_{n-1} - (a_0 - r) U_{n-2}$$

ou

$$(2) \qquad U_n = (a_0 + 2) U_{n-1} - (a_0 + 1 - r) U_{n-2}.$$

C'est la formule (34) de ma première Note. L'inadvertance commise à l'endroit cité a consisté à utiliser cette formule à partir de $n = 2$, alors qu'elle n'est en réalité démontrée et que de fait elle n'est vraie qu'à partir de $n = 3$.

Il faut donc, pour appliquer les formules que j'ai fait connaître relativement aux suites récurrentes, poser

$$U_1 = U'_0, \quad U_2 = U'_1, \quad \ldots, \quad U_n = U'_{n-1}, \quad \ldots$$

C'est la suite des U', prise avec les termes initiaux U'_0 et U_1, qui est récurrente.

La formule (12) de ma première Note ([1]) donne dès lors

$$U_n = U_1 u_n - (a_0 + 1 - r) U_0 u_{n-1}$$

les u étant les termes de la suite récurrente *fondamentale* définie par l'échelle de récurrence (2) avec les termes initiaux

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1.$$

Si l'on remplace U'_n, U'_1 et U_0 par leurs valeurs prises dans la première suite, on a

$$(15) \qquad U_n = U'_0\,[(a_1 - a_0 - r)\,u_n - (a_0 - a_1 - r a_0)\,u_{n-1}].$$

Il suffit ensuite, au moyen de la formule (8) de ma première Note, d'exprimer u_n et u_{n-1} en fonction de $(a_0 + 2)$ et de $(a_0 + 1 - r)$ pour avoir l'expression explicite de U_n.

Mais nous laisserons de côté ces calculs pour reprendre avec les formules correctes qui viennent d'être établies ici l'étude de la convergence et de la sommation des séries considérées.

([1]) *Nouvelles Annales*, 3e série, t. III, p. 71. Cette formule se trouve généralisée pour les suites récurrentes linéaires d'ordre quelconque dans le même Mémoire (p. 80). J'ai établi depuis la formule généralisée par un procédé beaucoup plus simple dans la seconde des Notes citées plus haut. La notion de *suite fondamentale*, que j'ai envisagée pour la première fois dans mon Mémoire de 1883, et la formule en question ont été introduites par Ed. Lucas dans sa *Théorie des nombres* (p. [illegible]). Il faut, pour éviter toute confusion, remarquer qu'à l'endroit cité Lucas a interverti les rôles joués dans mon Mémoire par les lettres u et U.

2. Ayant écrit la série sous la forme

$$\begin{aligned} S &= U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots \\ &= U_0 + U'_0 + U'_1 + U'_2 + \ldots \\ &= U_0 + S', \end{aligned}$$

nous n'aurons qu'à nous occuper de la série S'. Cette série est récurrente en vertu de la formule (2). Elle sera convergente si les racines de son équation génératrice

$$(4) \qquad x^2 - (a_0 + 2)x + (a_0 + 1 - r) = 0$$

ont un module inférieur à l'unité.

Si cette condition est remplie, on aura la somme S' de la série par application de la formule (19) de ma première Note, généralisée par la formule (6) de la seconde ([1]). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} S' &= \frac{(1 - a_0 - 2)U'_0 + U'_1}{1 - (a_0 + 2) + (a_0 + 1 - r)} \\ &= \frac{-(a_0 + 1)a_0 U_0 + (a_0^2 + a_0 - r)U_0}{-r} \\ &= -U_0. \end{aligned}$$

Il vient, par suite, pour la somme de la série proposée

$$S = U_0 + S' = U_0 - U_0 = 0.$$

De là ce curieux théorème :

Lorsqu'une série de la forme considérée est convergente, sa somme est nulle quels que soient U_0, a_0 *et* r.

([1]) *Nouvelles Annales*, 3e série, t. IX, p. 97. Il est à remarquer que ces deux formules concordent parfaitement, car il ne faut pas perdre de vue que, la formule (19) de ma première Note ne faisant connaître que $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots$, il faut, pour retomber sur le cas particulier de la formule (6) de la seconde, ajouter U_0 au second membre, ce qui donne

$$U_0 + \frac{U_1 + bU_0}{1 - (a + b)} = \frac{(1 - a)U_0 + U_1}{1 - (a + b)}.$$

Ce théorème est susceptible d'une importante généralisation, que j'ai récemment communiquée à l'Académie des Sciences [1] et dont la démonstration paraîtra prochainement.

3. Voici un exemple qui aura l'avantage de nous fournir une vérification du théorème obtenu.

Prenons

$$U_0 = 1, \qquad u_0 = -1, \qquad r = -\tfrac{1}{2}.$$

L'échelle de récurrence (2) est alors

$$U_n = U_{n-1} - \frac{U_{n-2}}{2} \qquad (n \geq 3).$$

Son équation génératrice

$$r^2 - r - \tfrac{1}{2} = 0$$

a pour racines

$$r' = \frac{-1+i}{2}, \qquad r'' = \frac{-1-i}{2},$$

dont le module $\rho = \sqrt{\frac{1}{2}}$ est inférieur à 1. La série est donc convergente et sa somme, d'après le théorème ci-dessus démontré, doit être nulle.

Pour le vérifier, remarquons que, si nous prenons les trois formules

$$U_n = U_{n-1} - \frac{U_{n-2}}{2},$$

$$U_{n+1} = U_n - \frac{U_{n-1}}{2},$$

$$U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{U_n}{2},$$

et si nous les ajoutons membre à membre, après avoir multiplié la dernière par $\frac{1}{2}$, nous avons

$$U_{n+2} = -\frac{U_{n-2}}{4}.$$

---

[1] *Comptes rendus*, t. CXX, p. 790.

Ainsi les termes pris de 4 en 4 respectivement à partir de U_1, de U_2, de U_3 et de U_4, forment des progressions géométriques de raison $-\frac{1}{4}$. Or le calcul direct donne

$$U_1 = -1, \quad U_2 = -\frac{1}{2}, \quad U_3 = 0, \quad U_4 = \frac{1}{4}.$$

Si donc s est la somme de la progression géométrique de premier terme -1 et de raison $-\frac{1}{4}$, on a

$$S = U_0 + s + \frac{s}{2} - \frac{s}{4} = 1 + \frac{5s}{4}.$$

Mais

$$s = \frac{-1}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{4}{5},$$

par suite

$$S = 1 - 1 = 0$$

et la vérification est faite.

4. Pour terminer cette Note, je donnerai une démonstration nouvelle de la formule de sommation des séries récurrentes que j'y ai employée.

Soit donc la série

$$S = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots \text{ ad inf.}$$

supposée convergente et telle que

$$(\alpha) \qquad U_{n+p} = a_0 U_{n+p-1} + a_1 U_{n+p-2} + \ldots + a_{p-1} U_n.$$

La somme cherchée, étant évidemment une fonction linéaire des p termes initiaux U_0, U_1, ..., U_{p-1}, pourra toujours se mettre sous la forme

$$(\beta) \qquad S = \frac{U_{p-1} + b_1 U_{p-2} + b_2 U_{p-3} + \ldots + b_{p-1} U_0}{b_p}.$$

Or, si nous représentons par S_n la somme de la série lorsqu'on la fait commencer au terme U_n, nous avons

$$S_n = U_n + S_{n+1}$$

ou, en vertu de la formule (β),

$$\frac{U_{n+p-1} + b_1 U_{n+p-2} + \ldots + b_{p-1} U_n}{b_p} = U_n + \frac{U_{n+p} + b_1 U_{n+p-1} + \ldots + b_{p-1} U_{n+1}}{b_p},$$

c'est-à-dire

$$U_{n+p} = (1 - b_1) U_{n+p-1} + (b_1 - b_2) U_{n+p-2} + \ldots + (b_{p-1} - b_p) U_n.$$

Cette relation devant avoir lieu, quel que soit n, doit être identique à (α). Donc

$$1 - b_1 = a_0, \qquad b_1 - b_2 = a_1, \qquad \ldots, \qquad b_{p-1} - b_p = a_{p-1},$$

d'où l'on tire

$$b_1 = 1 - a_0,$$
$$b_2 = 1 - (a_0 + a_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_p = 1 - (a_0 + a_1 + \ldots + a_{p-1}).$$

On n'a plus qu'à transporter ces valeurs de b_1, b_2, ..., b_p dans (β) pour avoir la formule que nous avons appliquée plus haut.