NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. MANGEOT

Sur l'intersection d'un tore et d'une quadrique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 519-526

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__519_0>

SUR L'INTERSECTION D'UN TORE ET D'UNE QUADRIQUE;

PAR M. S. MANGEOT,
Docteur ès Sciences,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Troyes.

Je me propose de résoudre la question suivante :

Quelles sont les quadriques qui coupent le tore suivant deux courbes sphériques? Construire ces deux courbes.

Soient O le centre du tore, Oz son axe de révolution, Ox, Oy deux axes rectangulaires de son équateur, r le rayon de son cercle générateur, et l la distance du centre de ce cercle à Oz. Rapporté aux droites Ox, Oy, Oz, le tore est défini par l'équation

$$(x^2+y^2+z^2+l^2-r^2)^2 = 4l^2(x^2+y^2),$$

que l'on peut écrire de la manière suivante

$$(x^2+y^2+z^2-\lambda)^2 = V,$$

en posant

$$V = \lambda^2 - 2(x^2+y^2+z^2)\lambda - 2(l^2-r^2)(x^2+y^2+z^2) \\ + 4l^2(x^2+y^2) - (l^2-r^2)^2$$

et désignant par λ une constante arbitraire. En vertu d'un théorème de M. Darboux sur les surfaces cyclides (¹), les quadriques qui coupent le tore suivant deux courbes sphériques seront toutes celles qui sont circonscrites aux quadriques V correspondant à l'équa-

---

(¹) *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques.* Paris, J.-B. Baillière; 1873.

tion $V = 0$. Je vais montrer que les quadriques V ne sont autres que celles qui se raccordent avec le tore. Soit Σ une de celles-ci : la courbe de raccordement est du quatrième ordre. Tout plan P mené par Oz coupe la quadrique Σ suivant une conique G, le tore suivant deux cercles C, C′, et les deux sections doivent se toucher en quatre points. Donc G est bitangente à chacun des deux cercles C, C′, et a pour axe la droite Oz. Dès lors Oz est un axe de la quadrique Σ, et la conique G a un sommet fixe sur Oz : quand le plan P tourne autour de Oz, cette conique reste égale à elle-même. On conclut de là que Σ est une quadrique de révolution, engendrée par la rotation, autour de l'axe du tore, d'une conique bitangente à chacun des deux cercles de sa méridienne. Or, pour toute valeur de λ, l'équation $V = 0$ représente une quadrique remplissant ces conditions.

Je suis ainsi conduit au resultat qui suit :

Pour qu'un tore et une quadrique S se coupent suivant deux courbes sphériques, il faut et il suffit que l'on puisse inscrire dans les deux surfaces une même quadrique Σ.

Soit

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

l'equation du plan H de raccordement des deux quadriques S et Σ. L'équation de S a la forme

$$V - (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)^2$$

et les deux sphères sur lesquelles se trouve l'intersection ont pour équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 + \lambda) \pm (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0.$$

Les centres des deux sphères sont différents, si, comme nous pouvons l'admettre, la quadrique sécante

S n'est pas de révolution autour de l'axe du tore. Ces deux points sont sur la droite $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$. Le plan radical des deux sphères est le plan H. Les quatre points de rencontre de ce plan H avec les deux cercles de contact du tore et de Σ sont communs au tore et à S, et appartiennent à l'une ou l'autre des deux courbes sphériques : ils sont donc sur le cercle commun aux deux sphères. J'ajoute que, Σ étant de révolution autour de Oz, la quadrique S admet nécessairement comme plan de symétrie le plan mené par Oz perpendiculairement à H, plan qui contiendra les centres des deux sphères.

En rassemblant ces résultats, je puis énoncer le théorème suivant :

Quand un tore et une quadrique S *sont inscrits dans une même quadrique* Σ, *leur intersection* Γ *peut être placée sur deux sphères. Les centres des deux sphères sont symétriques l'un de l'autre par rapport au centre du tore : ils sont situés sur la perpendiculaire menée par ce point au plan* H *de la courbe de contact des deux quadriques. Le cercle commun aux deux sphères est l'intersection* D *du plan* H *avec la sphère qui contient les deux parallèles de contact du tore et de la quadrique* Σ. *La projection de la courbe* Γ *sur le plan méridien du tore perpendiculaire au plan* H *est formée de deux coniques.*

Pour construire la courbe Γ, il suffit de savoir construire les deux sphères précédentes, puisque alors on sera ramené à déterminer l'intersection d'une sphère et d'un tore.

Si l'on connaît, en dehors du plan H, un point m de la courbe Γ, les deux sphères seront connues; car on connaîtra un cercle D et un point m de l'une des sphères et, par suite, un cercle D de l'autre sphère avec son centre.

Mais on peut obtenir les deux sphères sans supposer connu un point de Γ. Je vais, en effet, donner un moyen de construire leurs centres, ce qui suffira à les déterminer, sachant qu'elles contiennent le cercle D.

Pour définir la méridienne G de Σ, que je suppose d'abord être un ellipsoïde ou un hyperboloïde, on donne l'un de ses axes $2a$, $2c$: l'autre est déterminé par la relation

$$a^2 - c^2 = \frac{c^2 l^2}{c^2 - l^2},$$

en vertu de laquelle cette conique est en contact avec les deux cercles C, C'. Prenons à volonté un point M sur la quadrique S, et rapportons toutes les surfaces aux trois axes Ox, Oy, Oz, en faisant passer le plan xOz par M. L'équation de Σ est

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

celle de S est

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1+K(\lambda' x+\mu' y+\nu' z+h)^2=0,$$

λ', μ', ν' étant les cosinus directeurs de la normale au plan H, et enfin celle des deux sphères sera

$$(x^2+y^2+z^2+r^2-l^2)^2-4r^2\rho^2 \\ -\frac{4Ka^2c^2l^2}{c^2-a^2}(\lambda' x+\mu' y+\nu' z+h)^2=0.$$

Prenons comme inconnue la distance ρ du centre de l'une d'elles au centre du tore : on a

$$\rho^2=\frac{Ka^2c^2l^2}{c^2-a^2},$$

et l'on est ramené à déterminer K. Pour cela, construisons la polaire de M par rapport à la méridienne G située dans le plan xOz, et projetons M en N sur cette droite; puis prolongeons MN jusqu'à sa rencontre en R avec Oz. On aura, en désignant par x_0, o, z_0 les coordonnées de M,

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = \pm \frac{\mathrm{MN} \times \mathrm{MR}}{a^2}.$$

D'un autre côté, d étant la distance du point M au plan H, on a

$$\lambda' x_0 - \nu' z_0 + h = \pm d.$$

La comparaison de ces deux égalités donne

$$\mathrm{K} = \pm \frac{\mathrm{MN} \times \mathrm{MR}}{a^2 d^2};$$

on aura donc, pour construire ρ, la formule

$$\rho^2 = \pm \frac{(c^2 - r^2) \times \mathrm{MN} \times \mathrm{MR}}{d^2};$$

les longueurs qui figurent au second membre sont toutes connues.

Il est bien évident que la construction que je viens d'indiquer deviendrait inutile si l'on connaissait la section principale A de la quadrique S dont le plan est perpendiculaire au plan H; car les huit points de rencontre de cette conique avec les deux cercles du tore situés dans son plan devant appartenir aux deux sphères sont quatre à quatre sur deux grands cercles de ces sphères, et, connaissant les huit points, on connaîtrait ainsi ces deux grands cercles. On serait dans ce cas si S était un cône de sommet donné, puisque alors A serait formée des deux tangentes menées de ce sommet à la méridienne G dont le plan contient ce point : en sorte que, quand une quadrique est inscrite dans un tore, tout cône ou cylindre circonscrit à la quadrique coupe le tore suivant une courbe située sur deux sphères dont la construction est très simple.

La propriété que je viens d'indiquer au sujet de la conique A donne lieu à cette proposition de Géométrie plane :

Quand deux coniques A *et* B *sont bitangentes, si l'on coupe l'une d'elles,* A, *par deux cercles égaux* C, C', *bitangents à l'autre, les huit points de rencontre sont quatre à quatre sur deux autres cercles, dont les centres sont symétriques par rapport au centre de* B, *et dont les points communs sont ceux où la droite des contacts de* A *et* B *rencontre le cercle passant par les quatre points de contact de* B *avec les deux cercles* C *et* C'.

Cas particuliers. — J'indique ce que deviennent les conclusions qui précèdent dans les trois cas où la quadrique Σ n'est ni un ellipsoïde ni un hyperboloïde.

1° *Σ est un cône.* — On a ici cette proposition :

Si l'on considère le cône de révolution qui a pour méridienne les tangentes doubles intérieures de la méridienne d'un tore et même axe que lui, toute quadrique S *circonscrite à ce cône coupe le tore suivant deux courbes sphériques.*

La formule qui donne ρ est, dans ce cas,

$$\rho = \frac{l}{d}\sqrt{uv},$$

en appelant u, v les distances d'un point quelconque de S aux deux génératrices du cône dont le plan passe par ce point.

2° *Σ est formée des deux plans limites du tore.* — Les quadriques S sont alors des cylindres ; donc :

Les cylindres elliptiques tangents aux deux plans *limites d'un tore le coupent suivant deux courbes sphériques.*

La formule faisant connaître ρ est la même que la précédente, u et v désignant ici les distances d'un point quelconque du cylindre aux deux plans limites.

3° Σ *est un cylindre.* — Ce cylindre a pour équation $x^2+y^2=0$, et les surfaces S sont les cônes définis par la relation

$$x^2+y^2=(\alpha x+\beta y+\gamma z-\delta)^2.$$

Donc :

Quand un cône a son sommet sur l'axe d'un tore, et que sa base, dans le plan de l'équateur du tore, est une conique ayant un foyer au centre du tore, l'intersection du cône et du tore est formée de deux courbes sphériques.

Les droites joignant le sommet du cône aux deux sommets de la base situés sur l'axe focal coupent le tore en huit points appartenant quatre à quatre à deux cercles autres que ceux de la méridienne : ce sont les grands cercles des deux sphères sur lesquelles se trouve l'intersection.

Ces trois cas particuliers correspondent respectivement aux trois valeurs suivantes de λ :

$$r^2-l^2,\quad -(r^2+l^2),\quad l^2-r^2.$$

Remarques. — La question que je viens de traiter donne une solution de ce problème de Géométrie descriptive [1] :

---

[1] Et aussi de celui-ci : *On donne un point, une droite, un cercle, et une conique bitangente au cercle définie par un axe. Construire géométriquement les points de rencontre du cercle avec une conique passant par le point donné et ayant un double contact, sur la droite donnée, avec la conique donnée.*

Construire l'intersection d'un tore et d'une quadrique passant par un point donné et se raccordant, dans un plan donné, avec une quadrique de révolution circonscrite au tore, définie par un de ses sommets.

Les considérations qui précèdent conduisent encore à ces deux propositions, faciles à vérifier :

Si l'on coupe un tore par deux sphères quelconques dont les centres soient symétriques par rapport au centre du tore, les deux courbes d'intersection peuvent être placées sur une même quadrique.

Toute quadrique passant par l'intersection d'une sphère et d'un tore rencontre le tore suivant une seconde courbe sphérique.

En prenant les traces de toutes ces surfaces sur un plan méridien du tore, on obtiendrait des propositions correspondantes de Géométrie plane : on les aperçoit aisément, et je me dispenserai d'en donner l'énoncé.