NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. LEMAIRE

Solution géométrique de la question de mathématiques du concours de l'École polytechnique en 1891

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 49-60

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__49_0>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES DU CONCOURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1891;

Par M. J. LEMAIRE,
Ancien élève de l'École Polytechnique,
Professeur au lycée de Douai.

On donne une parabole P; *on porte à partir de chacun de ses points et dans les deux sens, sur une parallèle à une direction fixe* Δ, *des longueurs égales à la distance de ce point au foyer de la parabole.*

1° *Trouver le lieu des extrémités de ces longueurs; montrer qu'il se compose de deux paraboles* P_1 *et* P_2 *et donner la raison de ce dédoublement;*

2° *Démontrer que les axes des paraboles* P_1 *et* P_2 *sont perpendiculaires l'un sur l'autre, qu'ils pivotent autour d'un point indépendant de la direction* Δ, *et que, quelle que soit cette direction, la somme des carrés des paramètres des deux paraboles est constante.*

3° *Trouver et construire le lieu décrit par les sommets des paraboles* P_1 *et* P_2 *lorsqu'on fait varier la direction* Δ.

I. Soient (*fig.* 1)

F le foyer de la parabole donnée P,
X'X son axe,
Y'Y sa directrice,
θ l'angle aigu de Δ avec X'X,
M un point quelconque de la courbe,
M_1 le point obtenu en prenant $MM_1 = MF$ sur la parallèle à Δ_1 menée par M,
MD la perpendiculaire menée de M à Y'Y.

M est le centre d'un cercle tangent en D à Y'Y et passant par F et M_1.

Joignons FD, FM_1, DM_1 ; nous avons

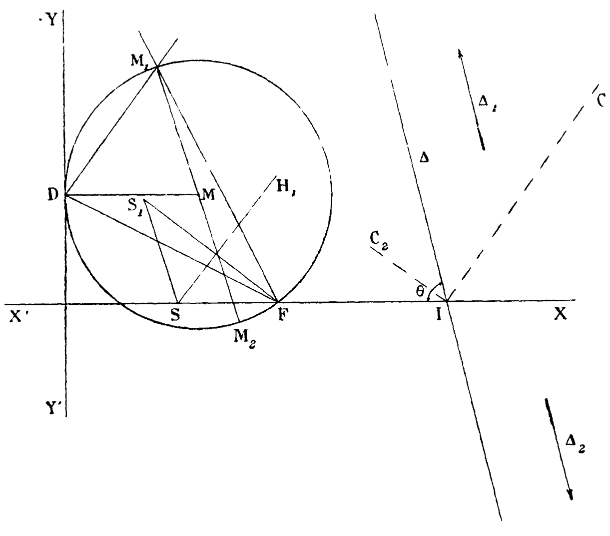
$$\widehat{YDM_1} = \frac{\widehat{DMM_1}}{2} = \frac{\theta}{2}$$

et aussi

$$\widehat{DFM_1} = \frac{\theta}{2}.$$

DM_1 et FM_1 sont les rayons correspondants de deux faisceaux homographiques ; M_1 décrit donc une conique

Fig. 1.



passant par F et par le point à l'infini dans la direction DM_1, c'est-à-dire dans la direction de la bissectrice IC_1 de $\widehat{\Delta I X}$. Le point M_1 ne sera rejeté à l'infini que si DM_1 est elle-même à l'infini ; la conique lieu de M_1 a donc une asymptote rejetée à l'infini; c'est, par suite, une parabole : appelons-la P_1.

Soit M_2 le point obtenu en prenant $MM_2 = MF$ sur la parallèle à Δ_2 menée par M. On verrait, comme ci-dessus, que le lieu de M_2 est une parabole P_2 dont la direction asymptotique est la bissectrice IC_2 de $\widehat{\Delta I X'}$.

II. Les diamètres des paraboles P_1 et P_2 étant respectivement parallèles aux bissectrices des angles $\widehat{\Delta I X}$ et $\widehat{\Delta I X'}$ ont des directions rectangulaires.

Soient S le sommet de P, S_1 le point correspondant de P_1.

Le diamètre de P_1 qui passe par S est la bissectrice SH_1 de $\widehat{S_1 S F}$. Le triangle SS_1F étant isoscèle, les points F et S_1 sont symétriques par rapport à ce diamètre; comme ces deux points appartiennent à P_1, SH_1 est l'axe même de cette parabole.

Ceci démontre que l'axe de P_1 passe par le sommet de la parabole donnée; il en est de même de l'axe de P_2.

Soient (*fig.* 2) AB la corde de P menée par F parallèlement à Δ, C le pôle de cette droite par rapport à P : ce point est sur la directrice $Y'Y$ et CA et CB sont rectangulaires; CF et AB sont aussi rectangulaires.

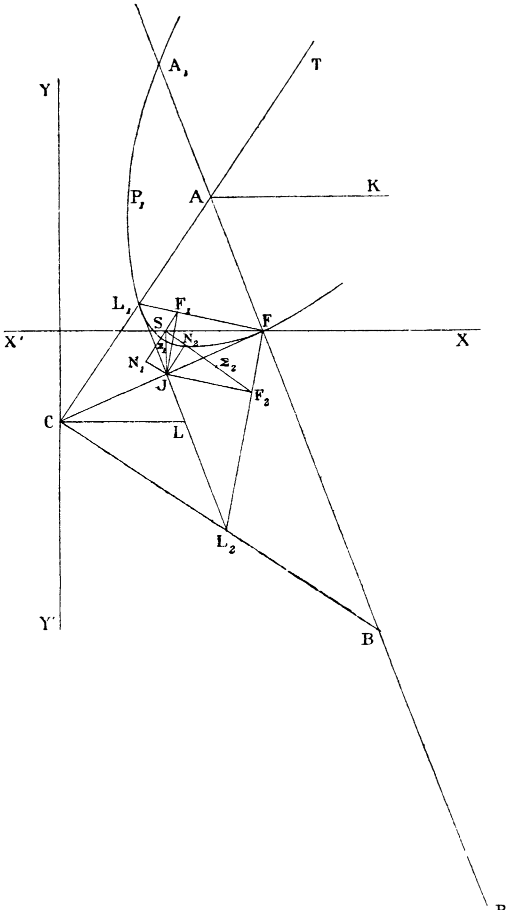
Soit AK la parallèle à $X'X$ menée par A.

La tangente en A à P, étant bissectrice de $\widehat{A_1 A K}$, est parallèle à IC_1 et, par suite, diamètre de P_1; le point de P_1 situé sur ce diamètre est le milieu L_1 de CA : c'est le point correspondant au point de contact L de P et de la tangente à cette courbe parallèle à Δ.

L_1 étant le milieu de CA, le point C est le pôle de

A_1F par rapport à P_1 ; il en résulte que CF est tangente à P_1 au point F.

Fig. 2.



C est de même le pôle de B_2F par rapport à P_2 et CF est tangente à P_2 au point F.

Nous voyons que *les paraboles* P_1 *et* P_2 *sont tan-*

gentes en F, et que *le point* C *a la même polaire par rapport aux trois paraboles* P, P_1, P_2.

Si L_2 est le milieu de CB, L_1L_2 est tangente à la fois aux trois courbes.

Soit J le point commun à L_1L_2 et à CF; ces deux droites sont perpendiculaires.

Donc J appartient à la directrice de chacune des paraboles P_1 et P_2; comme d'ailleurs J est sur la tangente à P en son sommet, puisque ce point est la projection de F sur une tangente à cette parabole, on en conclut que *le lieu du point de rencontre des directrices de* P_1 *et* P_2, *quand* Δ *varie, est la tangente à la parabole donnée en son sommet.*

Ces diverses remarques permettent de terminer facilement la question :

J appartenant à la directrice de P_1 et la polaire de ce point, par rapport à cette courbe, étant L_1F, le foyer de P_1 est le pied F_1 de la perpendiculaire menée de J à L_1F.

Joignons F_1S : cette droite est l'axe de P_1 et est parallèle à CA; la perpendiculaire JN_1 menée de J à FS est la directrice de P_1.

De même, le foyer de P_2 est le pied F_2 de la perpendiculaire menée de J à FL_2, l'axe de P_2 est F_2S et sa directrice la perpendiculaire JN_2 à SF_2.

JSF_1FF_2 est inscriptible dans le cercle de diamètre JF.

Les triangles JN_1F_1, JN_2F_2, JSF sont semblables et donnent

$$\frac{N_1F_1}{JF_1} = \frac{N_2F_2}{JF_2} = \frac{SF}{JF},$$

ou, en désignant par p, p_1, p_2 les paramètres des paraboles P, P_1, P_2,

$$\frac{p_1}{JF_1} = \frac{p_2}{JF_2} = \frac{p}{2JF},$$

d'où

$$p_1^2 + p_2^2 = \frac{p^2}{4} \times \frac{\overline{JF_1}^2 + \overline{JF_2}^2}{\overline{JF}^2}.$$

JF_1FF_2 est un rectangle ; par suite,

$$\overline{JF_1}^2 + \overline{JF_2}^2 = \overline{JF}^2.$$

Par conséquent,

$$p_1^2 + p_2^2 = \frac{p^2}{4} = \text{const}.$$

III. Le sommet de P_1 est le milieu Σ_1 de N_1F_1. Cherchons le lieu de Σ_1 quand Δ varie. Posons

$$S\Sigma_1 = -\rho, \qquad F_1SF = \omega,$$

et cherchons une relation entre ρ, ω, p : cette relation sera l'équation du lieu cherché en coordonnées polaires, l'origine étant S et la direction positive de l'axe polaire SX.

Nous avons successivement

$$S\Sigma_1 = \tfrac{1}{2}(SN_1 - SF_1),$$

$$\begin{aligned} SN_1 &= SJ \sin\omega = SF \cot\widehat{SJF} \sin\omega \\ &= \frac{p}{2} \cot\widehat{YCF} \sin\omega = \frac{p}{2} \cot 2\,\widehat{YCA} \sin\omega \\ &= \frac{p}{2} \cot 2\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \sin\omega = -\frac{p}{2} \cot 2\omega \sin\omega. \end{aligned}$$

Le triangle SF_1F donne

$$\begin{aligned} \frac{SF_1}{SF} &= \frac{\sin\widehat{SFF_1}}{\sin\widehat{SF_1F}} = \frac{\sin\left(\widehat{L_1FC} - \widehat{SFJ}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \widehat{SF_1J}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\widehat{L_1CY} - \widehat{JCL}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \widehat{SFJ}\right)} = \frac{\sin\left(\widehat{L_1CY} - \widehat{JCL}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \widehat{JCL}\right)}. \end{aligned}$$

Comme

$$\widehat{L_1CY} = \frac{\pi}{2} - \widehat{L_1CL} = \frac{\pi}{2} - \omega$$

et

$$\widehat{JCL} = \frac{\pi}{2} - 2\widehat{L_1CY} = 2\omega - \frac{\pi}{2},$$

on en conclut

$$\frac{SF_1}{SF} = \frac{\sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) - \left(2\omega - \frac{\pi}{2}\right)\right]}{\sin 2\omega} = \frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega},$$

d'où

$$SF_1 = \frac{p}{2}\,\frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega}.$$

Remplaçant, dans l'expression de $S\Sigma_1$, SN_1 et SF_1 par leurs valeurs, nous obtenons

$$S\Sigma_1 = \frac{p}{4}\left[-\cot 2\omega \sin\omega - \frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega}\right].$$

Remplaçant $S\Sigma_1$ par $-\rho$ et simplifiant, nous avons

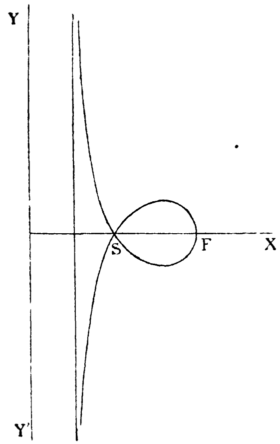
$$\rho = \frac{p}{4} \times \frac{2 - 3\sin^2\omega}{\cos\omega}.$$

Telle est l'équation du lieu de Σ_1, qui est en même temps le lieu de Σ_2. Ce lieu est une cubique unicursale ayant pour point double le point S; on la construit sans difficulté ; elle a la forme d'une strophoïde, passe par F, et admet pour asymptote une parallèle à la directrice de P, équidistante de cette droite et de S (*fig*. 3).

Remarques diverses. — 1° Nous avons démontré que P_1 et P_2 sont tangentes en F; la tangente commune en ce point est la perpendiculaire à Δ; l'autre tangente commune réelle est parallèle à Δ.

2° Le point C (*fig.* 2), ayant même polaire par rapport aux paraboles P_1 et P_2, est le point de rencontre de deux sécantes communes à ces coniques; l'une de ces sécantes est CF; il est facile de trouver l'autre.

Fig. 3.



P_1 et P_2 peuvent, en effet, être considérées comme des coniques inscrites dans une troisième, formée de la tangente commune $L_1 L_2$ et de la droite de l'infini du plan.

D'après un théorème connu, les cordes de contact de P_1 et P_2 avec cette troisième conique et les sécantes communes à P_1 et P_2 forment un faisceau harmonique; or ces cordes de contact sont les diamètres CA et CB de P_1 et P_2, donc la sécante commune cherchée est la polaire de CF par rapport à l'angle $\widehat{ACB}$, c'est-à-dire la directrice de P; les points correspondants communs à P_1 et P_2 sont imaginaires. On verrait aussi facilement que P et P_1 se coupent en deux points réels, et que la droite qui les joint passe par C; de même pour P et P_2.

3° Nous avons trouvé, dans la troisième partie,

$$SF_1 = \frac{p}{2}\frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega}.$$

Le lieu des foyers des paraboles P_1 et P_2 a pour équation

$$\rho = \frac{p}{2}\frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega},$$

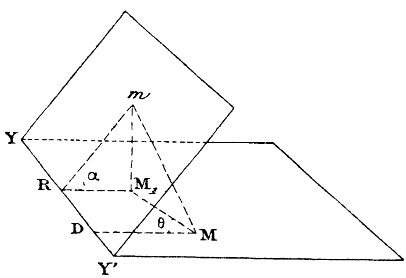
c'est une courbe de la même famille que celle que nous avons construite plus haut.

Il serait facile de démontrer quelques propriétés de ces courbes en remarquant qu'elles sont des transformées de coniques par rayons vecteurs réciproques.

Voici une autre solution plus concise et fort élégante :

I. Soient YY' (*fig.* 4) la directrice de P, M un point quelconque de la courbe, MM_1 la parallèle à Δ_1 mené par M, MD

Fig. 4.



la perpendiculaire menée de M à Y'Y, θ l'angle aigu de Δ avec l'axe de P; nous avons $MM_1 = MD$.

Par Y'Y, faisons passer un plan faisant avec le plan de P un angle aigu quelconque α; soit m le point commun à ce plan et à la perpendiculaire en M_1 au plan de P, mR perpendiculaire à $Y'Y$; M_1R est aussi perpendiculaire à cette droite. Nous pouvons écrire

$$\operatorname{tang}\widehat{mMM_1} = \frac{mM_1}{M_1M} = \frac{M_1R\operatorname{tang}\alpha}{M_1M}$$
$$= \frac{M_1D\sin\frac{\theta}{2}\operatorname{tang}\alpha}{M_1M} = 2\sin^2\frac{\theta}{2}\operatorname{tang}\alpha = \text{const.}$$

Comme de plus le plan MmM_1 a une direction fixe, nous voyons que Mm est parallèle à une direction fixe.

Le lieu de m est une projection oblique de P, c'est-à-dire une parabole; le lieu de M_1 est la projection orthogonale du précédent, c'est donc une parabole : soit P_1.

Les tangentes à ces trois courbes aux points correspondants M, m, M_1 coupent $Y'Y$ au même point: en ce point passe aussi la tangente en M_2 à la parabole P_2.

Ainsi *les tangentes aux paraboles* P, P_1, P_2 *aux trois points correspondants* M, M_1, M_2 *concourent sur la directrice de* P.

Cette remarque va nous permettre de terminer simplement la question.

II. Soient S_1 et S_2 (*fig.* 5) les points de P_1 et P_2 correspondant au sommet S de P : les tangentes en S, S_1, S_2 à P, P_1, P_2 devant se couper sur la directrice de P sont parallèles: les normales en S_1 à P_1, en S_2 à P_2 sont perpendiculaires à cette directrice.

On démontre facilement que les axes de P_1 et P_2 sont les bissectrices de $\widehat{S_1SF}$ et $\widehat{S_2SF}$. Soit S_1N_1 la normale en S_1 à P_1; I_1N_1 est la sous-normale; et comme I_1 est le milieu de SN_1, on a

$$p_1 = I_1S,$$

en désignant par p_1 le paramètre de P_1.

On a de même

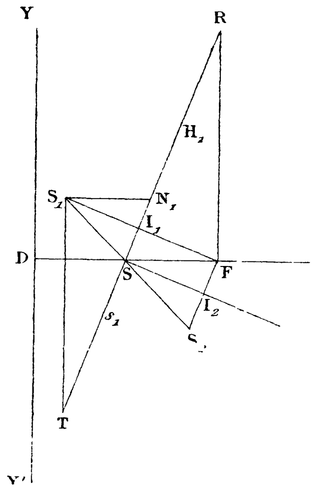
$$p_2 = I_2S.$$

Par suite

$$p_1^2 + p_2^2 = \overline{SF}^2 = \text{const.}$$

La propriété énoncée plus haut permet de voir que les paraboles P_1 et P_2 sont tangentes en F ; reportons-nous à la *fig.* 5 de la première solution : la tangente en F à P_1 coupe sur la directrice la tangente en B à P ; de même la tangente en F

Fig. 5.



à P_2 coupe sur la directrice la tangente en A à P. Comme les tangentes en A et B à P concourent sur la directrice de cette courbe, P_1 et P_2 admettent la même tangente en F.

De cette propriété, il résulte aussi immédiatement que la tangente à P parallèle à Δ est aussi tangente à P_1 et P_2.

III. *Lieu des sommets de* P_1 et P_2. — La tangente en S_1 à P_1 rencontre l'axe de cette courbe en T : le sommet de P_1 est le milieu s_1 de TI_1.

Menons FR parallèle à Y'Y ; nous avons

$$I_1R = I_1T.$$

Par suite

$$I_1s_1 = \frac{I_1R}{2},$$

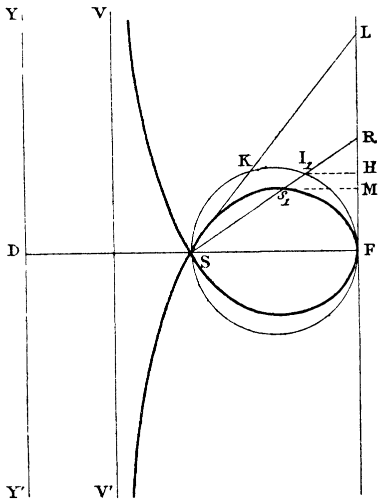
d'où la génération suivante pour le lieu des points s_1 :

Par S, *on mène une transversale quelconque qui coupe en* I_1 *la circonférence de diamètre* SF *et en* R *la perpen-*

diculaire en F *à* SF ; *on prend* $I_1 s_1 = \frac{I_1 R}{2}$ *sur* $I_1 S$: *la courbe lieu de* s_1 *est la courbe lieu des sommets de* P_1 *et* P_2.

La courbe se construit alors par points sans difficulté (*fig.* 6) : Elle passe en F où elle est tangente à FR, a en S un point

Fig. 6.



double dont les tangentes sont la droite SL, telle que $SK = \frac{SL}{3}$ et sa symétrique par rapport à SF.

Elle a une asymptote parallèle à Y'Y ; soient $I_1 H$ et $s_1 M$ perpendiculaires à FR,

$$\frac{s_1 M}{I_1 H} = \frac{s_1 R}{I_1 R} = \frac{3}{2}.$$

La distance du point à l'infini de la courbe à FL est donc égale à $\frac{3}{2}$ SF ; autrement dit, l'asymptote est la droite VV' parallèle à Y'Y et équidistante de cette droite et de S.

X.