NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. MÉRAY

Sur la discussion et la classification des surfaces du deuxième degré

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 474-509

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__474_1>

SUR LA DISCUSSION ET LA CLASSIFICATION DES SURFACES DU DEUXIÈME DEGRÉ;

PAR M. CH. MÉRAY,
Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

1. Quoique cette question appartienne aux éléments, qu'elle en soit même une des plus rebattues, sa solution ne me paraît pas avoir atteint encore le dernier degré de la perfection. Le procédé maintenant en faveur pour la discussion comporte une décomposition du premier membre de l'équation en carrés d'expressions linéaires spéciales dont le mode de formation varie avec les circonstances et dont les rapports avec les coefficients sont obscurs et sans intérêt; il faut ensuite étudier, à divers points de vue, le système de ces expressions. C'est, en somme, un instrument composite, d'occasion en quelque

sorte aussi, qui fonctionne sans régularité ni élégance. Quant à la considération du centre qui joue toujours le rôle principal dans la classification, elle est fort mal liée à la nature intime de ces surfaces, car elle conduit tantôt à en rapprocher de très dissemblables, comme le cône et l'ellipsoïde, tantôt à en séparer d'autres, telles que l'hyperboloïde et le paraboloïde réglés, telles encore que deux paires de plans, non parallèles dans l'une, parallèles dans l'autre, dont les propriétés générales sont identiques.

Je vais essayer de traiter cette matière avec plus d'uniformité et de précision en assignant des *fonctions déterminées* des coefficients, dont la nullité et les signes indiquent immédiatement la variété de la surface correspondante, en modifiant aussi la classification dans un sens qui semble la rendre plus nette et plus matérielle.

PRÉLIMINAIRES SUR LES FORMES QUADRATIQUES.

2. L'étude des formes d'un degré quelconque exige la connaissance approfondie des propriétés de toutes celles de degrés moindres et surtout des formes linéaires pour lesquelles je renverrai quelquefois le lecteur (par un numéro précédé de la lettre L.) à mon opuscule intitulé : *Exposition nouvelle de la théorie des formes linéaires et des déterminants* (¹).

Le type d'une forme quadratique de *largeur* l, c'est-à-dire à l variables $x_1, x_2, \ldots, x_l$, est

$$(1)\qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_l) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j,$$

(¹) Paris, Gauthier-Villars et fils; 1884.

où chacun des indices i, j prend, indépendamment de l'autre, les valeurs $1, 2, \ldots, l$ et où $a_{i,j} = a_{j,i}$ désignent les $\frac{l(l+1)}{1.2}$ coefficients.

Quand tous les coefficients portant quelque indice supérieur à $\lambda < l$ sont $= 0$, ou bien quand on fait

$$x_{\lambda+1} = x_{\lambda+2} = \ldots = x_l = 0,$$

cette forme se réduit en fait à

$$\sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

forme en $x_1, x_2, \ldots, x_\lambda$ de largeur λ seulement.

Il est très utile de considérer les coefficients $a_{i,j}$ comme éléments de l'abaque carré symétrique (L. 4),

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,l}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,l}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{l,1}, & a_{l,2}, & \ldots, & a_{l,l}, \end{array} \right.$$

que je nommerai l'*abaque* de la forme (1). Il se confond avec celui du système des l formes linéaires en x_1, $x_2, \ldots, x_l$ que l'on obtient en prenant les demi-dérivées premières de la forme quadratique (1) par rapport à ces diverses variables respectivement.

3. En substituant aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_l$ dans la forme (1) l formes linéaires aux L nouvelles variables $X_1, X_2, \ldots, X_L$, savoir :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} M_1^{(1)} X_1 + M_2^{(1)} X_2 + \ldots + M_L^{(1)} X_L, \\ M_1^{(2)} X_1 + M_2^{(2)} X_2 - \ldots + M_L^{(2)} X_L, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ M_1^{(l)} X_1 + M_2^{(l)} X_2 + \ldots + M_L^{(l)} X_L, \end{array} \right.$$

respectivement, on obtient une nouvelle forme quadratique de largeur L en $X_1, X_2, \ldots, X_L$

$$(4)\quad F(X_1, X_2, \ldots, X_L) = \sum_{i,j} A_{i,j} X_i X_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, L),$$

que l'on dit *composée* de la forme *composante* (1) et des formes *simples* (3).

Le théorème qui suit fournit les relations les plus intéressantes entre les coefficients de toutes les formes engagées dans cette opération.

L'abaque des déterminants mineurs d'ordre quelconque q de l'abaque

$$(4)\quad \left\{\begin{matrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & \ldots, & A_{1,L}, \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & \ldots, & A_{2,L}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ A_{L,1}, & A_{L,2}, & \ldots, & A_{L,L}, \end{matrix}\right.$$

de la forme composée (4) (L.49), *peut être obtenu en procédant comme il suit :*

I. *Quand* $L = l$, *on construira* (*sur un même modèle*) *les abaques* $[a]_q$, $[M]_q$ *des déterminants mineurs d'ordre* q *de l'abaque* (2) *de la forme composante et de l'abaque* (*alors carré*),

$$(5)\quad \left\{\begin{matrix} M_1^{(1)}, & M_2^{(1)}, & \ldots, & M_L^{(1)}, \\ M_1^{(2)}. & M_2^{(2)}, & \ldots, & M_L^{(2)}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ M_1^{(l)}, & M_2^{(l)}, & \ldots, & M_L^{(l)}, \end{matrix}\right.$$

du système (3) *des formes simples ; on formera ensuite l'abaque induit* $\{[a]_q \times [M]_q\}$ *du premier par le second, ligne à colonne* (L.5), *cela de manière que sa* $i^{\text{ième}}$ *ligne ait pour éléments les résultats de l'induction des* 1^{re}, 2^{e}, $\ldots$, $l^{\text{ième}}$ *lignes de* $[a]_q$ *par la* $i^{\text{ième}}$ *colonne de* $[M]_q$; *on formera enfin* $\{[a]_q \times [M]_q\} \times [M]_q$, *abaque induit, ligne à colonne encore, de* $\{[a]_q \times [M]_q\}$ *par le même second inducteur* $[M]_q$.

II. *Quand* $L > l$, *on agrandira d'abord l'abaque* (2) *de la composante, de* $L - l$ *lignes et d'autant de colonnes, composées d'éléments tous nuls, l'abaque* (5) *des formes simples, de* $L - l$ *lignes quelconques, puis on procédera comme ci-dessus* (1).

III. *Quand* $L < l$, *on opérera encore de la même manière, mais après avoir agrandi de* $l - L$ *colonnes de zéros l'abaque* (5) *des formes simples* [*et aussi de* $l - L$ *lignes et* $l - L$ *colonnes semblables, l'abaque* (4) *de la forme composée*].

I. 1° Pour $q = 1$, le point en question résulte immédiatement de la nature des expressions des coefficients de la forme composée au moyen de ceux de la composante et des formes simples que fournit le calcul direct et de la définition de l'induction de deux abaques offrant une dimension commune (L.5).

2° D'où son exactitude pour toute valeur de q, à cause de la relation fondamentale existant entre les déterminants mineurs d'un même ordre, de trois abaques dont l'un a été engendré par l'induction des deux autres (L.64).

II. Les choses se passent encore comme dans le cas précédent, parce qu'il est évidemment permis de remplacer la composante par une forme quadratique de largeur L où s'évanouit tout coefficient portant quelque indice supérieur à l (2) et le système de l formes simples (3) par celui des L formes linéaires obtenu en lui adjoignant $L - l$ autres quelconques.

III. Les choses se passent encore de même, parce qu'en fait on ne change pas les formes simples en ajoutant à chacune d'elles les termes

$$o.X_{L+1} + o.X_{L+2} + \ldots + o.X_l.$$

4. A cause du rôle important que jouent ainsi dans la composition (et ailleurs encore) les déterminants mineurs d'un même ordre q de l'abaque d'une forme quadratique, il est commode de leur affecter une dénomination spéciale. Nous les nommerons les *discriminants de classe* q de cette forme et nous en formerons, naturellement par la pensée, un abaque carré symétrique ayant pour dimension dans chaque sens le nombre

$$\frac{l(l-1)\ldots(l-q+1)}{1.2\ldots q}.$$

Ceux de classe 1 et leur abaque se confondent avec les coefficients mêmes de la forme et avec ce que nous avons appelé son abaque (2). La classe l en contient un seul que nous dirons *fondamental* : c'est le déterminant même de l'abaque de la forme.

Nous appellerons encore *classe* d'une forme quadratique, la plus élevée de celles de ses discriminants où ils ne s'évanouissent pas tous.

5. Parmi les conséquences variées de tout ce qui précède, nous noterons seulement les suivantes :

I. *La classe de la forme composée ne peut surpasser celle de la composante.* Car tout discriminant de classe q de la première étant une expression linéaire et homogène par rapport à quelques-uns de ceux de la seconde (3) se réduit successivement à o quand tous ces derniers s'évanouissent.

II. *Les classes de ces deux formes sont égales quand le système des formes simples* (3) *est réduit* (L.9) :

1° En supposant d'abord $L = l$, il existe un système simple de L formes linéaires en $x_1, x_2, \ldots, x_l$ dont la substitution à $X_1, X_2, \ldots, X_L$ dans le système (3) considéré comme composant conduit au système linéaire

$$\begin{array}{l}
1.x_1 + 0.x_2 + \ldots + 0.x_l (= x_1), \\
0.x_1 + 1.x_2 + \ldots + 0.x_l (= x_2), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0.x_1 + 0.x_2 + \ldots + 1.x_l (= x_l),
\end{array}$$

et dont, par suite, la substitution dans la forme composée régénère la composante. Inversement, donc la forme (1) est composée de la forme composée (4); sa classe, qui ne peut être inférieure à celle de cette dernière (I), ne peut donc non plus la surpasser.

2° Le seul autre cas à considérer est celui où $L > l$, car le système de formes linéaires (3) étant supposé réduit, on ne peut avoir $L < l$. Il se ramène immédiatement au précédent, au moyen de l'artifice déjà employé ci-dessus (3, II), qu'on emploiera toutefois en prenant réduit, comme il est permis de le faire, le système total de L formes linéaires constitué par les l formes données (3) et les $L - l$ auxiliaires à leur adjoindre.

6. Pour que la forme (1) soit composée de quelque composante quadratique de largeur $\mathfrak{l} \leqq l$ à discriminant fondamental $\neq 0$ et de quelque système réduit de $\mathfrak{l}$ formes linéaires simples en $x_1, x_2, \ldots, x_l$, il faut ainsi (5, II) que sa classe soit égale au nombre $\mathfrak{l}$ qui marque évidemment celle de la composante. Nous allons prouver maintenant que *cette condition est suffisante.*

I. *Si les* $\mathfrak{l}$ *formes linéaires de largeur* $l \geqq \mathfrak{l}$,

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\alpha_1^{(1)} x_1 + \alpha_2^{(1)} x_2 + \ldots + \alpha_{\mathfrak{l}}^{(1)} x_{\mathfrak{l}} + \alpha_{\mathfrak{l}+1}^{(1)} x_{\mathfrak{l}+1} + \ldots + \alpha_l^{(1)} x_l, \\
\alpha_1^{(2)} x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_l^{(2)} x_l, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\alpha_{(\mathfrak{l})}^{1} x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_l^{(\mathfrak{l})} x_l,
\end{array} \right.$$

constituent un système réduit et si $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ *désignant une forme quelconque aux mêmes variables, les déterminants de l'abaque à* $\mathfrak{l}+1$ *lignes*

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \dfrac{d\varphi}{dx_1}, & \dfrac{d\varphi}{dx_2}, & \ldots, & \dfrac{d\varphi}{dx_l}, \\ \alpha_1^{(1)}, & \alpha_2^{(1)}, & \ldots, & \alpha_l^{(1)}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \alpha_1^{(\mathfrak{l})}, & \alpha_2^{(\mathfrak{l})}, & \ldots, & \alpha_l^{(\mathfrak{l})} \end{array}\right.$$

sont tous identiquement nuls, cette forme φ *est certainement composée de formes linéaires simples* (6) (¹).

En supposant, pour fixer les idées, que $x_1, x_2, \ldots, x_\mathfrak{l}$ constituent un groupe de $\mathfrak{l}$ variables dont les coefficients dans les formes (6) donnent un déterminant $\neq 0$, on peut résoudre, par rapport à ces variables, les équations linéaires obtenues en égalant ces formes aux $\mathfrak{l}$ nouvelles variables $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{l}$ après y avoir fait les substitutions

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_{\mathfrak{l}+1} = X_{\mathfrak{l}+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_l = X_l, \end{array}\right.$$

$X_{\mathfrak{l}+1}, \ldots, X_l$ désignant $l - \mathfrak{l}$ autres nouvelles variables. On obtient ainsi $\mathfrak{l}$ formules du type

$$(9)\qquad x_i = \frac{\delta^{(i,1)}}{\Delta}\mathfrak{x}_1 + \ldots + \frac{\delta^{(i,\mathfrak{l})}}{\Delta}\mathfrak{x}_\mathfrak{l} - \ldots - \frac{\Delta_{i,j}}{\Delta}X_j - \ldots - \frac{\Delta_{i,l}}{\Delta}X_l,$$

où, pour abréger, nous avons représenté par Δ le déterminant non nul en question, par $\Delta_{i,j}$ ce qu'il devient quand à sa $i^{\text{ième}}$ colonne ($i \leq \mathfrak{l}$) on substitue celle des

---

(¹) Un théorème bien plus général est fondamental dans la théorie des fonctions composées; mais sa démonstration repose sur des principes étrangers aux éléments.

coefficients de $x_j (j > \mathfrak{l})$ dans le système (6), par $\delta^{(i,i')}$ son mineur complémentaire à l'élément $\alpha_i^{(i')}$.

Les substitutions (8), (9) faites maintenant dans la forme φ donneront une forme $\Phi(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{l}, X_{\mathfrak{l}+1}, \ldots, X_l)$ aux l variables $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{l}, X_{\mathfrak{l}+1}, \ldots, X_l$ pour laquelle il vient immédiatement

$$\frac{d\Phi}{dX_j} = \frac{1}{\Delta}\left[\Delta \frac{d\varphi}{dx_j} - \Delta_{1,j}\frac{d\varphi}{dx_1} - \Delta_{2,j}\frac{d\varphi}{dx_2} - \ldots - \Delta_{\mathfrak{l},j}\frac{d\varphi}{dx_\mathfrak{l}}\right],$$

formule où il faut faire ensuite les substitutions dont il s'agit.

L'expression entre crochet, étant précisément le déterminant des colonnes de rangs j, 1, 2, . ., $\mathfrak{l}$ dans l'abaque (7), est nulle par hypothèse, $\frac{d\Phi}{dX_j}$ aussi, par conséquent; il en résulte que les coefficients des termes de Φ contenant l'une des variables $X_{\mathfrak{l}+1}, \ldots, X_l$ à un degré > 0 sont tous nuls et que cette fonction se réduit ainsi à une forme $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{l})$ aux $\mathfrak{l}$ variables $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{l}$ seulement. En y faisant la substitution inverse de celle que nous venons d'exécuter, c'est-à-dire en y remplaçant ces $\mathfrak{l}$ variables par les formes linéaires (6), on régénère donc la forme φ, ce qu'il suffisait de prouver.

II. Comme, par hypothèse, les déterminants mineurs du système des l formes linéaires

$$(10)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,l}x_l, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,l}x_l, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{l,1}x_1 + a_{l,2}x_2 + \ldots + a_{l,l}x_l \end{cases}$$

s'évanouissent tous au delà de l'ordre $\mathfrak{l}$, mais non dans cet ordre lui-même, $\mathfrak{l}$ de ces formes, les $\mathfrak{l}$ premières pour fixer les idées, constituent un système réduit (L.56), et si, dans l'abaque (7), on remplace les $\mathfrak{l}$ dernières lignes par les coefficients de ces $\mathfrak{l}$ formes et la première par les demi-dérivées de f, on voit immédiatement que ses déterminants sont tous identiquement nuls. Effectivement, chacun de ces déterminants est une forme linéaire ayant pour coefficients soit des déterminants nuls par eux-mêmes, soit certains discriminants de classe $\mathfrak{l}+1$, de la forme f, lesquels sont tous nuls par hypothèse. On en conclut (I) que cette forme est bien composée d'une certaine composante de largeur $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{l})$, et des $\mathfrak{l}$ premières formes linéaires (10).

Ici, cette composante est quadratique et sa classe est $\mathfrak{l}$, puisqu'elle ne peut surpasser ce nombre et que si elle était moindre, celle de la forme composée f serait aussi inférieure à $\mathfrak{l}$, contrairement à l'hypothèse (5, I).

Comme la forme $\mathfrak{f}$ est composée de f et des formes linéaires constituant les seconds membres des formules (8), (9), ses coefficients pourront être calculés au moyen des relations générales établies au n° 3.

On remarquera qu'ainsi *une forme quadratique est toujours composée de celles de ses demi-dérivées qui constituent un système réduit équivalent à celui de toutes.*

7. Pour plus de commodité, j'appellerai *zéro* de la forme (1) tout système de valeurs des variables lui donnant la valeur o et je le dirai *simple* s'il n'annule pas toutes les dérivées premières de la forme, *double* s'il les annule toutes.

En supposant réels, comme nous le ferons désormais, les coefficients des formes dont nous parlerons, ainsi que les valeurs attribuées aux variables, voici les premières observations à faire à ce sujet :

I. On trouve les zéros doubles réels de la forme (1) en égalant à o toutes ses demi-dérivées premières et en cherchant les systèmes de solutions réelles des l équations linéaires et homogènes ainsi obtenues. *Il y en a donc un seul* ($x_1 = x_2 = . \ . = x_l = 0$), *une infinité simple, double, triple, ..., selon que la classe de cette forme est l, $l-1$, $l-2$, $l-3$, ...*

II. *Quand la forme* (1) *possède un zéro simple réel, elle en possède une infinité d'autres et, parmi les systèmes de valeurs réelles des variables, il y en a nécessairement qui rendent sa valeur, les unes positive, les autres négative.*

En appelant

$$(11) \qquad x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_l,$$

$$(12) \qquad x''_1, \quad x''_2, \quad \ldots, \quad x''_l$$

deux systèmes quelconques de valeurs réelles des variables, et t une indéterminée réelle et prenant

$$(13) \quad x_1 = x'_1 + x''_1 t, \quad x_2 = x'_2 + x''_2 t, \quad \ldots \quad x_l = x'_l + x''_l t,$$

la forme (1) prend la valeur

$$(14) \qquad P(t) = P^{1,1} + 2P^{1,11} t + P^{11,11} t^2,$$

où, pour abréger, nous avons posé

$$\begin{aligned} P^{1,1} &= f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_l), \\ P^{1,11} &= \frac{1}{2}\left(x''_1 \frac{dP^{1,1}}{dx'_1} + \ldots + x''_l \frac{dP^{1,1}}{dx'_l}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x'_1 \frac{dP^{11,11}}{dx''_1} + \ldots + x'_l \frac{dP^{11,11}}{dx''_l}\right), \\ P^{11,11} &= f(x''_1, x''_2, \ldots, x''_l). \end{aligned}$$

Si le système (12) est un zéro simple, on a $P^{11,11} = 0$ et l'expression (14) se réduit à

$$(15) \qquad P^{1,1} + 2P^{1,11} t;$$

mais les coefficients des quantités (11) dans la seconde expression de $P^{I,II}$ ne sont pas tous nuls et, pour les valeurs de ces quantités, il existe une infinité de systèmes ne réduisant pas $P^{I,II}$ à o. Pour chacun de ces systèmes, les valeurs (13) des variables constitueront donc un zéro réel en prenant

$$t = t_0 = -\frac{P^{I,I}}{2P^{I,II}};$$

en outre, ce zéro sera simple, car il donne à $\frac{1}{2}\frac{df}{dx_i}$ les valeurs

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dP^{I,I}}{dx_i} - t_0\frac{dP^{II,II}}{dx_i}\right),$$

dont la somme des produits par $x''_1, \ldots, x''_l$ se réduit à $P^{I,II} \neq 0$.

Il est évident, enfin, que pour $t \gtrless t_0$ l'expression (15) des valeurs correspondantes de notre forme prendra des valeurs non nulles et de signes contraires.

III. *Si* $P^{I,I}$, $P^{II,II}$, *valeurs de la forme correspondant aux systèmes* (11), (12) *sont toutes deux* $\neq 0$ *et de signes contraires, celle-ci possède quelque zéro simple réel.*

Dans ce cas, en effet, on a certainement

$$(16) \qquad P^{I,I}P^{II,II} - (P^{I,II})^2 < 0,$$

et l'équation

$$P(t) = 0$$

du deuxième degré en t offre deux racines réelles t_1, t_2. Les formules (13) donneront donc deux zéros pour la forme, en prenant $t = t_1$ ou $= t_2$ et chacun de ceux-ci est simple. Car si $t = t_1$, par exemple, fournissait un zéro double, on arriverait facilement par le raisonnement ci-dessus (II) aux relations

$$\begin{cases} P^{I,I} - t_1 P^{I,II} = 0, \\ P^{I,II} + t_1 P^{II,II} = 0. \end{cases}$$

dont la coexistence entraînerait la nullité du premier membre de l'inégalité (16).

8. Pour $l = 1$, la forme (1) n'offre évidemment aucun zéro simple. Mais pour $l > 1$, et d'après ce qui précède, *elle en a une infinité de réels ou aucun, selon que, parmi ses valeurs non nulles correspondant aux valeurs réelles des variables, il est possible ou non d'en trouver qui soient de signes différents.*

Les formes du premier genre sont dites *indéfinies*, celles du second *définies* et, en outre, *positives* ou *négatives*, selon que le signe invariable de leurs valeurs non nulles est + ou —.

Le théorème qui fera l'objet du n° 10 permet d'opérer la distinction; mais son énoncé exige une définition qu'il nous faut donner auparavant.

9. Une file (soit horizontale, soit verticale) de l'abaque général des discriminants d'une même classe donnée, de la forme quadratique (1), en renferme toujours un, mais pas davantage, dans l'abaque particulier duquel se trouve quelque diagonale exclusivement composée d'éléments empruntés à la diagonale principale $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{l,l}$ de l'abaque (2) de cette forme. Et si, comme nous le supposerons désormais, on s'est arrangé de manière que, dans le développement d'un seul discriminant de cette sorte, le produit des éléments de cette diagonale caractéristique soit précédé du signe +, il en sera évidemment de même pour tout discriminant du même genre appartenant à une autre file de l'abaque général dont il s'agit.

Ces discriminants spéciaux doivent parfois être distingués des autres et je les dirai *principaux*. Ceux de classe 1, par exemple, sont précisément $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{l,l}$ éléments principaux de l'abaque (2) qui, dans f, servent de coefficients aux carrés des variables; le discriminant fondamental, seul existant dans la classe l, est, en fait, principal, etc. On remarquera que les discriminants principaux de classe q de la forme f sont précisément les discriminants fondamentaux des formes de largeur commune q auxquelles la réduit l'attribution de la valeur 0 à tous les groupes imaginables de $l-q$ de ses variables.

10. *Pour que la forme* (1) *soit définie, il faut et il suffit que tous ses discriminants principaux non nuls soient positifs quand ils appartiennent aux classes paires et d'un même signe quelconque, quand ils appartiennent aux classes impaires. En outre, elle est positive ou négative, selon que ces derniers le sont tous eux-mêmes.*

I. Comme le changement des signes des coefficients d'une forme négative la rend positive et multiplie chaque discriminant par ± 1, selon que sa classe est paire ou impaire, il nous suffira de faire la démonstration pour les formes positives seulement.

II. *Si la forme* (1) *est définie, toutes celles de largeurs* $l-1$, $l-2$, ..., 2, 1 *auxquelles la réduit l'attribution de la valeur* 0 *à* 1, 2, ..., $l-2$, $l-1$ *variables choisies à volonté, le sont aussi et, en même temps qu'elle, positives ou négatives.* C'est évident.

III. En représentant par D le discriminant fondamental de la forme (1) et par $A_{i,j}$, généralement, son discriminant de classe $l-1$ constituant le mineur complémentaire à l'élément $a_{i,j}$ de son abaque, par

$$A_{1,1}, \quad A_{2,2}, \quad \ldots \quad A_{l,l}, \tag{17}$$

en particulier, ses discriminants principaux de classe $l-1$, nous aurons cette proposition préparatoire :

Quand la forme (1) *est positive, l'un quelconque* $A_{i,i}$ *des discriminants principaux* (17) *et* D *ne peuvent être des quantités toutes deux* $\gtrless 0$ *et de signes contraires.*

Pour

$$x_1 = A_{l,1}, \quad x_2 = A_{l,2}, \quad \dots, \quad x_l = A_{l,l},$$

cette forme écrite

$$\frac{1}{2}x_1\frac{df}{dx_1} + \frac{1}{2}x_2\frac{df}{dx_2} + \dots + \frac{1}{2}x_l\frac{df}{dx_l}$$

prend effectivement la valeur

$$A_{l,l}D$$

qui doit être non négative.

IV. *Dans la même hypothèse, le discriminant fondamental* D *de la forme considérée* (1) *est positif ou nul :*

1° Soit d'abord une forme binaire, telle que

$$(18) \qquad f(x_1, x_2) = a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2,$$

et supposons-la positive.

Si l'un de ses discriminants de classe 1, $a_{1,1}$ par exemple, est $\gtrless 0$, on a forcément $a_{1,1} > 0$, sans quoi la forme primaire $f(x_1, 0) = a_{1,1}x_1^2$ serait évidemment négative (II); on a donc $D \geqq 0$, puisque D et $a_{1,1}$ ne peuvent être de signes contraires (III).

Si l'on a $a_{1,1} = a_{2,2} = 0$, on a nécessairement aussi $a_{1,2} = 0$, sans quoi la forme binaire considérée qui se réduit à $2a_{1,2}x_1x_2$ serait évidemment indéfinie; il en résulte donc aussi $D = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2 = 0$.

2° Admettant maintenant le point en question pour toute forme de largeur $< l$, nous prouverons ensuite que, *si dans la forme considérée* (1) *un seul des discriminants* (17) $A_{I,I}$ *est nul, on a aussi* $A_{I,j} = 0$, *quel que soit* j, *et, par suite*,

$$D = 0.$$

Pour simplifier l'écriture prenons $I = 1$ et pour fixer les idées supposons $j = 2$.

En multipliant par une nouvelle variable x les variables x_1, x_2, on change la forme (1) en une autre également quadratique aux $l - 1$ variables x, x_3, x_4, ..., x_l et aux deux paramètres x_1, x_2, dont l'abaque est

$$(19)\quad \left|\begin{matrix} (a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2) & (a_{1,3}x_1 + a_{2,3}x_2) & (a_{1,4}x_1 + a_{2,4}x_2) & \cdots & (a_{1,l}x_1 + a_{2,l}x_2) \\ (a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2) & a_{3,3} & a_{3,4} & \cdots & a_{3,l} \\ (a_{4,1}x_1 + a_{4,2}x_2) & a_{4,3} & a_{4,4} & \cdots & a_{4,l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{l,1}x_1 + a_{l,2}x_2) & a_{l,3} & a_{l,4} & \cdots & a_{l,l} \end{matrix}\right|$$

et dont le discriminant fondamental se réduit à

$$(20)\qquad A_{1,1}x_2^2 - 2A_{1,2}x_1x_2 + A_{2,2}x_1^2,$$

par une décomposition évidente de la première ligne et de la première colonne de l'abaque ci-dessus (19).

Quels que soient les paramètres x_1, x_2, la nouvelle forme en x, x_3, x_4, ..., x_l étant évidemment positive comme la proposée (1), mais de largeur $l - 1$ seulement, son discriminant fondamental est positif ou nul. En d'autres termes, la forme binaire (20) en x_2, x_1 est positive et, par suite, (1°) son propre discriminant

$$A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}^2 = -A_{1,2}^2,$$

à cause de $A_{1,1} = 0$, ne peut être négatif.

On a donc $A_{1,2} = 0$, et, de même,

$$A_{1,1} = A_{1,2} = A_{1,3} = \ldots = A_{1,l} = 0,$$

d'où

$$D = a_{1,1}A_{1,1} + a_{1,2}A_{1,2} + \ldots + a_{1,l}A_{1,l} = 0.$$

3° *Si, au contraire,* $A_{1,1}$ *n'est pas nul,* il est positif en vertu de l'hypothèse, puisqu'il est le discriminant fondamental de la forme $f(x_1, x_2, \ldots, x_{1-1}, 0, x_{1+1}, \ldots, x_l)$ qui est positive (II) et de largeur $l - 1$ seulement; D *est donc positif aussi ou nul,* puisqu'il ne peut être de signe contraire à celui de $A_{1,1}$ (III).

4° Notre lemme, établi directement pour $l = 2$, subsiste donc pour toute valeur de l, puisque de là les raisonnements ci-dessus (2°), (3°) permettent de l'étendre successivement aux cas où l'on a $l = 3, 4, \ldots$.

V. *Pour que la forme* (1) *soit positive, il faut que chacun de ses discriminants principaux de toutes classes soit une quantité positive ou nulle.*

Car celui des discriminants de classe q qui ne contient aucun des $l - q$ éléments principaux de l'abaque (2) portant les indices $(i_1, i_1), (i_2, i_2), \ldots, (i_{l-q}, i_{l-q})$ est fondamental pour la forme de largeur q à laquelle la proposée se réduit quand on y fait $x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_{l-q}} = 0$ et qui est positive aussi (II), (IV).

VI. *La condition posée ci-dessus* (V) *est non seulement nécessaire, mais encore suffisante.*

Nous allons effectivement prouver que *si aucun discriminant principal de la forme* (1) *n'est négatif, elle est positive :*

1° *Cela est vrai pour une forme binaire, telle que* (18).

Car, en appelant (x'_1, x'_2), (x''_1, x''_2) deux systèmes réels quelconques de valeurs des variables, l'identité évidente

$$\begin{aligned} f(x'_1, x'_2)\, f(x''_1, x''_2) &= [a_{1,1} x'_1 x''_1 + a_{1,2}(x'_1 x''_2 + x'_2 x''_1) + a_{2,2} x'_2 x''_2]^2 \\ &\quad + (a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2)(x'_1 x''_2 - x'_2 x''_1)^2 \end{aligned}$$

montre que les valeurs correspondantes de la forme ne peuvent être de signes contraires, puisque le discriminant principal $a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}^2$ est supposé non négatif.

Si, d'ailleurs, le coefficient $a_{1,1}$ n'est pas nul, il est positif par hypothèse, $f(x'_1, x'_2)$ est > 0 pour $x'_1 \neq 0$, $x'_2 = 0$ et, par suite, $f(x''_1, x''_2)$, ou bien $f(x_1, x_2)$ ne peut acquérir aucune valeur négative.

Si, au contraire, $a_{1,1}=0$, on a forcément $a_{1,2}=0$, sans quoi le discriminant principal $a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}^2$ serait négatif, contrairement à l'hypothèse; $f(x_1, x_2)$ se réduit donc, quel que soit x_1, à $a_{2,2}x_2^2$ qui ne peut être une quantité négative, puisque $a_{2,2}$ est supposé ne pas en être une.

2° *Le même théorème supposé établi pour toute forme de largeur $< l$ subsiste pour la forme* (1) *de largeur l.*

Cette forme prenant évidemment les mêmes valeurs que la forme auxiliaire de l'alinéa IV (2°) quand on y attribue toutes les valeurs réelles possibles à ses $l-1$ variables $x, x_3, x_4, \ldots, x_l$ et à ses deux paramètres x_1, x_2, il suffit de prouver que cette dernière est toujours positive et, pour cela, en vertu de l'hypothèse, puisqu'elle est de largeur $l-1$ seulement, de constater que ses discriminants principaux sont positifs ou nuls.

La chose est évidente pour ceux ne dépendant pas de l'élément placé à l'intersection des deux premières files de l'abaque (19), car tous sont des discriminants principaux de la forme (1).

Quant au discriminant fondamental, il se réduit, comme nous l'avons aperçu ci-dessus (IV, 2°), à l'expression (20), forme binaire en x_2, x_1 qui est nécessairement positive. Car ses discriminants principaux de première classe $A_{1,1}$, $A_{2,2}$ sont positifs ou nuls, par hypothèse, puisqu'ils sont pour la forme proposée (1) des discriminants principaux de classe $l-1$, et celui de seconde classe

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix}$$

jouit de la même propriété. Effectivement, les relations générales entre les déterminants mineurs d'un même abaque carré permettent de l'écrire

$$D.X_{(11,22)}$$

où le second facteur est le déterminant de l'abaque (2) dépouillé de ses deux premières lignes et de ses deux premières colonnes, c'est-à-dire un discriminant principal de classe $l-2$ de la forme (1), lequel est comme D positif ou nul par hypothèse.

On raisonnerait de la même manière pour tout autre discriminant principal de la forme auxiliaire dépendant de l'élément placé à l'intersection des premières files de l'abaque (19).

3° *Le théorème en question est donc vrai pour toutes les valeurs de l*, puisque nous l'avons établi directement pour $l=2$ (1°).

11. Quand un discriminant principal de classe q d'une forme définie se trouve être nul, nous avons constaté incidemment (10, IV, 2°) qu'il en est de même pour tous ceux non principaux qui appartiennent à la ligne et à la colonne de celui-ci dans l'abaque général des discriminants de cette classe. *Si donc, dans la classe q, tous les discriminants principaux d'une forme définie sont nuls, les autres s'évanouissent tous aussi et la forme ne peut être que d'une classe inférieure à q.*

POINTS DOUBLES, POLES ET PLANS POLAIRES DANS LES SURFACES DU DEUXIÈME DEGRÉ. ABSENCE OU EXISTENCE DE POINTS SIMPLES RÉELS.

12. Les *coordonnées homogènes* d'un point de l'espace sont, comme on le sait, quatre quantités quelconques, mais non toutes $= 0$

$$(1) \qquad x,\ y,\ z,\ t,$$

dont les rapports $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ des trois premières à la dernière sont égaux respectivement à ses coordonnées proprement dites relativement à trois axes rectilignes donnés quelconques. De cette manière, chaque point possède une infinité de systèmes de coordonnées; pour un même point, deux systèmes quelconques sont *équivalents*, en ce sens que l'abaque (de dimensions 2, 4), dont ils forment les lignes, a des déterminants toujours nuls; mais pour deux points distincts, les mêmes déterminants ne le sont jamais à la fois.

Inversement, à chaque système de valeurs non toutes $= 0$ des quantités (1) (et à tous les systèmes équivalents) correspond toujours un point de l'espace et un seul ayant ces quantités pour coordonnées homogènes. Ceci suppose toutefois que la quatrième t n'est pas nulle; dans le cas contraire, et pour divers motifs inutiles à rappeler ici, il y a avantage à feindre que le point correspondant existe toujours, mais alors *à l'infini*. Au point de vue analytique les points à l'infini ne diffèrent en rien d'essentiel

13. En coordonnées homogènes, toute surface algébrique peut être représentée par une équation égalant à 0 une forme quaternaire de même degré en x, y, z, t.

et une ligne algébrique par deux équations simultanées de cette sorte. Réciproquement, une pareille équation ou deux, en système, représentent toujours une surface ou une ligne algébriques, sauf le cas où leurs solutions réelles ne forment pas un domaine d'extension suffisante et celui où elles ne donnent que des points à l'infini.

Par exemple, l'équation linéaire et homogène générale

$$ax + by + cz + dt = 0$$

est celle des plans.

Quand $a = b = c = 0$, $d \neq 0$, elle n'a pas d'autres solutions que des coordonnées du point à l'infini et d'ailleurs de pareilles coordonnées les vérifient toujours. En conséquence, les points à l'infini sont considérés comme ayant pour lieu ce qu'on nomme le *plan de l'infini* et l'on regarde les points à l'infini d'une figure (surface ou ligne) comme résultant de son *intersection* par ce plan fictif.

14. D'après cela et en conservant les notations classiques, nous écrirons l'équation générale des surfaces du deuxième degré dites *quadriques* par abréviation

$$f(x, y, z, t) = 0, \tag{2}$$

où

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) = a x^2 + a' y^2 + a'' z^2 & \\ + 2 b y z + 2 b' z x + 2 b'' x y & \\ + 2 c x t + 2 c' y t + 2 c'' z t & \\ + d t^2 & \end{aligned}$$

est une forme quadratique à coefficients réels non tous $= 0$, ayant pour abaque (2),

$$\begin{matrix} a, & b'', & b', & c, \\ b'', & a', & b, & c', \\ b', & b, & a'', & c'', \\ c, & c', & c'', & d. \end{matrix}$$

Je ne ferai provisoirement aucune distinction entre les points de la surface situés ou non à l'infini et je les dirai *simples* ou *doubles* selon que les coordonnées seront les éléments d'un zéro simple ou double de la forme f (7).

15. L'existence de points doubles exerce une influence majeure sur la configuration de la quadrique, comme le montre le théorème dont voici l'énoncé :

Ont tous leurs points sur la surface : 1° toute droite joignant un point quelconque à un point double; 2° tout plan joignant un point quelconque à deux points doubles (distincts).

I. Les coordonnées des points de la droite qui joint deux points distincts (x', y', z', t'), (x'', y'', z'', t'') sont fournies indéfiniment par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} x = x'\lambda' + x''\lambda'', \\ y = y'\lambda' + y''\lambda'', \\ z = z'\lambda' + z''\lambda'', \\ t = t'\lambda' + t''\lambda'', \end{cases}$$

où λ', λ'' désignent deux indéterminées, et le résultat de leur substitution dans la forme f est

$$(4)\qquad P^{1,1}\lambda'^2 + 2P^{1,11}\lambda'\lambda'' + P^{11,11}\lambda''^2,$$

les notations $P^{1,1}$, $P^{1,11}$, $P^{11,11}$ conservant la signification que nous leur avons donnée au n° 7.

Si donc les deux points considérés appartiennent à la surface, le premier à titre de point double, on a

$$P^{1,1} = \frac{dP^{1,1}}{dx'} = \frac{dP^{1,1}}{dy'} = \ldots = P^{1,11} = P^{11,11} = 0$$

et l'expression (4) est nulle quels que soient λ', λ''.

II. Même démonstration basée sur les formules

$$\begin{aligned}
x &= x'\lambda' + x''\lambda'' + x'''\lambda''',\\
y &= y'\lambda' + \ldots\\
z &= z'\lambda' + \ldots\\
t &= t'\lambda' + \ldots
\end{aligned}$$

fournissant les coordonnées de tous les points du plan qui déterminent les trois points non en ligne droite (x', y', z', t'), $(x'', \ldots)$, $(x''', \ldots)$.

16. Les coordonnées des points doubles de la quadrique (2) étant les systèmes de solutions non toutes $= 0$, des quatre équations linéaires et homogènes

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{df}{dx} &= ax + b''y + b'z + ct = 0,\\
\frac{1}{2}\frac{df}{dy} &= b''x + a'y + bz + c't = 0,\\
\frac{1}{2}\frac{df}{dz} &= b'x + by + a''z + c''t = 0\\
\frac{1}{2}\frac{df}{dt} &= cx + c'y + c''z + dt = 0,
\end{aligned}\right.$$

l'un ou l'autre des quatre cas suivants peut se présenter.

I. *La quadrique (c'est-à-dire la forme f) est de première classe* (4).

Ces équations se réduisent à une seule et les points doubles sont tous ceux du plan (réel) qu'elle représente et qui appartient tout entier à la surface. Celle-ci se réduit à *ce plan double par lui-même*, car la forme f peut être présentée comme le produit d'une constante $(\neq 0)$ par le carré d'une forme linéaire.

II. *La quadrique est de deuxième classe.*

Les équations (5) se réduisent à deux distinctes et *les points doubles sont tous ceux de la droite (réelle) qu'elles représentent.*

La surface comprenant tout plan mené par cette droite double et par une autre quelconque de ses points (15) *se réduit à quelque assemblage de plans passant par la droite double. Ces plans sont au nombre de deux distincts (réels ou imaginaires conjugués)* parce que, F_1, F_2 désignant les premiers membres du système (5) réduit à deux équations, on peut écrire

$$f = A_{11}F_1^2 + 2A_{12}F_1F_2 + A_{22}F_2^2,$$

expression qui, à cause de

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

est décomposable en deux facteurs linéaires dont les déterminants ne peuvent tous s'évanouir (6).

III. *La quadrique est de troisième classe.*

Les équations (5) se réduisent à trois distinctes donnant *un seul point double (qui est toujours réel) et la surface est un cône ayant ce point pour sommet* (géométriquement un cylindre, quand le même point est à l'infini) puisqu'elle contient entièrement toute droite menée de lui à un autre quelconque de ses points (15).

Le théorème du n° 6 permet de changer le premier membre de l'équation de la surface en une forme composée d'une composante quadratique terminée et des premiers membres des équations de trois plans distincts se coupant au sommet.

IV. *La quadrique est de quatrième classe.*

Elle ne possède alors aucun point double et, comme le premier membre de son équation ne peut résulter de la composition d'aucune composante quadratique de largeur < 4, *elle ne peut affecter aucune des formes précédentes.*

17. Une connexité très importante se présente encore entre la distribution des points doubles et celle des paires de figures du premier degré qui sont harmoniquement conjuguées par rapport à la quadrique.

Si, par exemple, $(\xi, \eta, \zeta, \theta)$, $(\Xi, \mathrm{H}, \mathrm{Z}, \Theta)$ sont les coordonnées d'un point et d'un plan harmoniquement conjugués, c'est-à-dire pôle et plan polaire l'un à l'autre, on a les quatre relations

$$\begin{aligned}
\rho\Xi &= a\xi + b''\eta + b'\zeta + c\theta,\\
\rho\mathrm{H} &= b''\xi + a'\eta + b\zeta + c'\theta,\\
\rho\mathrm{Z} &= b'\xi + b\eta + a''\zeta + c''\theta,\\
\rho\Theta &= c\xi + c'\eta + c''\zeta + d\theta,
\end{aligned}$$

où ρ désigne une indéterminée $\neq 0$. On en conclut facilement ce qui suit :

Le plan polaire d'un point double est absolument indéterminé.

Celui d'un point simple est déterminé et contient tous les points doubles pouvant exister.

Dans une quadrique douée de points doubles, tout plan qui n'en contient pas la totalité a pour pôle l'un quelconque d'entre eux et chaque plan les contenant tous a un pôle qui est indéterminé : 1° dans la première classe, d'une manière absolue; 2° dans la deuxième, sur un certain plan passant par la droite des points doubles; 3° dans la troisième, sur une droite passant par le point double unique.

Dans une quadrique dénuée de points doubles (quatrième classe), chaque pôle possède un pôle déterminé

18. L'existence de points simples réels étant liée à la possibilité d'un changement de signe pour la valeur de la forme f (8), les deux cas ci-après seront à distinguer à ce point de vue.

I. *La forme f est définie.* — La quadrique n'a aucun point simple réel et se réduit géométriquement à l'ensemble des points doubles réels qu'elle peut posséder. On la dit *imaginaire* [sauf le cas où elle est formée d'un plan double où il est toujours réel (16, I)].

II. *La forme f est indéfinie.* — La quadrique offre alors une infinité de points simples réels; elle est *réelle*.

Quant aux moyens d'opérer la distinction, ils sont fournis par le théorème du n° 10.

GÉNÉRATRICES RECTILIGNES.

19. Pour trouver les droites qui peuvent être situées tout entières sur la quadrique

$$f = 0, \tag{1}$$

il suffit de considérer deux points distincts indéterminés de l'espace (x', y', z', t'), (x, y, z, t) et d'exprimer que tous ceux de la droite qui les joint appartiennent à la surface.

En représentant par X', ..., X les valeurs des demi-dérivées de f en ces points et employant les formules (3) du n° 15 (I), on obtient immédiatement les trois conditions

$$f(x', y', z', t') = 0, \tag{2}$$

$$X'x + Y'y - Z'z + T't = Xx' + Yy' + Zz' - Tt' = 0, \tag{3}$$

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{4}$$

Elles expriment, les extrêmes que les points en question doivent appartenir à la surface, et la moyenne, que chacun d'eux doit être situé dans le plan tangent construit en l'autre.

En considérant le premier point comme donné sur la surface, le second restera indéterminé sur la ligne représentée par les équations (3), (4), c'est-à-dire sur l'intersection de la surface par son plan tangent en

$$(x', y', z', t')$$

et ainsi *cette ligne est l'ensemble des génératrices rectilignes passant par le point qu'on s'est donné.*

Si le point donné est double, on a

$$X' = Y' = Z' = T' = 0$$

l'équation (3) est satisfaite d'elle-même et *toute droite joignant ce point double à un autre point quelconque de la surface est une génératrice rectiligne,* ce que nous savions déjà (13).

S'il est simple, ce que nous supposerons désormais, l'une au moins des quantités X', Y', Z', T' n'est pas nulle et l'on a, par exemple,

$$T' \neq 0 \qquad (5)$$

La condition pour le point indéterminé de ne pas se confondre avec le point donné ne s'opposera donc pas à ce que nous l'assujettissions en outre à être situé dans le plan

$$T = 0 \qquad (6)$$

Cette condition additionnelle réduit les équations (3), (4) à

$$\left\{ \begin{aligned} Xx + Yy + Zz &= 0 \\ Xx + Yy + Zz &= 0 \end{aligned} \right. \qquad (7)$$

et l'on ne peut avoir

$$y'z - z'y = z'x - x'z = x'y - y'x = 0,$$

car les équations (2), (3), écrites

$$\begin{aligned} X'x' + Y'y' + Z'z' + T't' &= 0, \\ X'x + Y'y + Z'z + T't &= 0, \end{aligned}$$

donneraient

$$T'(x't - t'x) = 0;$$

d'où, à cause de l'inégalité (5),

$$x't - t'x = 0,$$

puis, de même,

$$y't - t'y = z't - t'z = 0,$$

et, contrairement à notre convention expresse, le point indéterminé coïnciderait avec le point donné.

En appelant ρ une inconnue auxiliaire, les trois équations simultanées

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \rho(y'z - z'y), \\ Y &= \rho(z'x - x'z), \\ Z &= \rho(x'y - y'x) \end{aligned} \right.$$

peuvent être substituées aux deux équations (7) et, après développement, la question revient à trouver tous les systèmes de valeurs de x, y, z, t, ρ, où les quatre premières ne sont pas toutes $= 0$ qui vérifient le système,

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} ax + (b'' + z'\rho)y + (b' - y'\rho)z + ct &= 0, \\ (b'' - z'\rho)x + a'y + (b + x'\rho)z + c't &= 0, \\ (b' + y'\rho)x + (b - x'\rho)y + a''z + c''t &= 0, \\ cx + c'y + c''z + dt &= 0. \end{aligned} \right.$$

L'élimination de x, y, z, t conduit à

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} a & b'' + z'\rho & b' - y'\rho & c \\ b'' - z'\rho & a' & b + x'\rho & c' \\ b' + y'\rho & b - x'\rho & a'' & c'' \\ c & c' & c'' & d \end{vmatrix} = 0.$$

équation en ρ ne contenant que des termes de degrés pairs, parce que le changement de ρ en $-\rho$ laisse son premier membre invariable et dont le degré effectif ne peut surpasser 2, parce que son degré apparent est 3.

Le terme indépendant de ρ est D, discriminant fondamental de la forme f.

Pour calculer le terme en ρ^2 nous remarquerons d'abord qu'une transformation facile, combinée avec l'égalité (2), ramène le premier membre de l'équation (10) à

$$\frac{1}{t'^2}\begin{vmatrix} a & b''+z'\rho & b'-y'\rho & X' \\ b''-z'\rho & a' & b+x'\rho & Y' \\ b'+y'\rho & b-x'\rho & a'' & Z' \\ X' & Y' & Z' & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous remarquerons ensuite que le terme en ρ^2 dans le développement de cette expression est le même que dans celui de

$$\frac{1}{t'^2}\begin{vmatrix} 0 & z'\rho & -y'\rho & X' \\ -z'\rho & 0 & x'\rho & Y' \\ y'\rho & -x'\rho & 0 & Z' \\ X' & Y' & Z' & 0 \end{vmatrix}.$$

Or, en formant ce dernier, il vient

$$-\frac{1}{t'^2}(x'X'+y'Y'+z'Z')^2\rho^2 = -T'^2\rho^2,$$

à cause de la même condition (2). L'équation cherchée en ρ est donc simplement

$$(11)\qquad D - T'^2\rho^2 = 0.$$

Les racines portées successivement dans les équations (9) fourniront autant de systèmes surabondants, mais possibles, d'équations linéaires à résoudre par rapport à x, y, z, t.

20. *Quand on a* $D=0$ (*quadriques de classes* 1,

2, 3), l'équation (11) donne $\rho = 0$ à cause de l'inégalité (5), les équations (9) se réduisent à celles des points doubles et *au point simple donné, quel qu'il soit, la surface a pour seules génératrices rectilignes la ou les droites le joignant aux points doubles.*

21. *Quand on a* $D \neq 0$ (*quadriques de quatrième classe*), la même équation a deux racines forcément inégales dont l'emploi fournira *au point donné et toujours, quel qu'il soit, deux génératrices rectilignes distinctes.*

Si donc il s'agit d'une quadrique de quatrième classe et s'il est sous-entendu que *le point donné est réel,* on ne pourra se trouver que dans l'un des deux cas suivants :

I. $D < 0$. — *Ces génératrices distinctes sont toujours imaginaires.*

II. $D > 0$. — *Elles sont toujours réelles.*

22. Comme les équations (6), (8) sont linéaires et homogènes en x, y, z, t, il suffira, pour obtenir des équations de la génératrice en (x', y', z', t') qui correspond à une racine déterminée ρ de l'équation (11), d'y considérer x, y, z, t comme des coordonnées courantes et d'en associer deux combinaisons satisfaites pour $x = x', y = y', \ldots$.

On remarquera les types

$$T'Y - X'T = \rho T'(y'z - z'y),$$
$$Z'Y - Y'Z = \rho[Z'(z'x - x'z) - Y'(x'y - y'x)],$$

et aussi l'équation (3) du plan tangent à la quadrique en (x', y', z', t'). On pourra y remplacer ρ par son expression évidente

$$\frac{\pm\sqrt{D}}{cx' + c'y' + c''z' + dt}.$$

POINTS A L'INFINI.

23. Si, en coordonnées homogènes et au point de vue exclusivement analytique, la distribution des points à l'infini d'une surface est chose indifférente, elle n'en donnera pas moins certains traits essentiels de sa configuration géométrique.

L'intersection d'une quadrique quelconque

$$(1)\qquad f(x, y, z, t) = ax^2 + \ldots - dt^2 = 0,$$

avec le plan à l'infini

$$t = 0,$$

se confond avec celle du même plan et de la quadrique auxiliaire

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{L}(x, y, z, t) \\ &\quad = f - (2cx + 2c'y - 2c''z + dt)\,t \\ &\quad = ax^2 + \ldots - 2byz + \ldots - 2b''xy = 0, \end{aligned}\right.$$

dont le premier membre a l'abaque bien plus simple

$$\begin{matrix} a, & b'', & b', & 0, \\ b'', & a', & b, & 0, \\ b', & b, & a'', & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, \end{matrix}$$

et dont chaque classe $\mathfrak{q}$, égale à celle de la forme ternaire $f(x, y, z, 0)$ d'abaque

$$(3)\qquad \left\{\begin{matrix} b, & b', & b, \\ b'', & a', & b, \\ a', & b, & a'', \end{matrix}\right.$$

ne peut surpasser ni 3 *ni celle de la forme f.*

Si les coefficients (3) s'évanouissent tous, la forme $\mathfrak{L}$ est identiquement nulle, ce que nous exprimerons plus commodément en disant qu'elle est *de classe* 0.

Sinon elle n'est pas divisible par t et elle admet toujours le zéro double $(0, 0, 0, t \neq 0)$ qui n'est pas à l'infini.

Il en résulte qu'alors *la quadrique auxiliaire* (2) *ne peut comprendre le plan de l'infini comme partie intégrante* et que *le plan ou la droite de ses points doubles ou son point double unique* (*selon les circonstances*) *ne peuvent être situés dans ce même plan.*

Ces dernières observations sont indispensables à la discussion de l'intersection dont il s'agit, qui doit être subordonnée à la valeur de la classe q de la quadrique proposée (1).

24. Pour $q = 1$, deux cas seulement sont possibles.

$\mathfrak{q} = 0$. — Le plan de l'infini appartient alors tout entier à la quadrique auxiliaire et, par suite, à la proposée. Comme celle-ci n'a d'autres points que ceux de quelque plan double (16, I), *elle se confond avec le plan de l'infini doublé par lui-même.*

$\mathfrak{q} = 1$. — La quadrique auxiliaire est un plan double non à l'infini (23). La proposée n'ayant ainsi qu'une droite double sur le plan de l'infini est *un plan double non à l'infini.*

25. Pour $q = 2$, on aura ces trois cas-ci.

$\mathfrak{q} = 0$. — Le plan de l'infini appartient encore à la quadrique proposée et *le surplus de celle-ci est un plan* (*réel*) *non à l'infini.* Car elle se compose généralement de deux plans distincts (16, II) et ici l'un d'eux est l'infini (partant réel).

$\mathfrak{q} = 1$. — La quadrique proposée a la droite de ses points doubles dans le plan de l'infini et se compose ainsi de *deux plans parallèles* (*distincts*).

$\mathfrak{q} = 2$. — La quadrique auxiliaire, se composant de deux plans distincts et non parallèles puisque la droite de ses points doubles ne peut être à l'infini (23), coupe le plan de l'infini suivant deux droites distinctes. La proposée également se compose ainsi de *deux plans* (*distincts*) *non parallèles.*

26. Pour $q = 3$, l'hypothèse $\mathfrak{q} = 0$ doit être rejetée parce qu'elle entraînerait $q = 1$, et les cas suivants peuvent seuls se présenter.

$\mathfrak{q} = 1$. — La quadrique auxiliaire étant un plan double, qui ne peut être à l'infini, la proposée est coupée par le plan de l'infini suivant une droite (réelle) doublée par elle-même. Elle a, d'autre part, un point double unique (16, III) situé sur cette génératrice rectiligne (20). Elle est donc un cône ayant son sommet dans le plan de l'infini, de plus tangent à ce plan, c'est-à-dire *un cylindre tangent au plan de l'infini.*

$\mathfrak{q} = 2$. — La quadrique auxiliaire étant une paire de plans distincts, non parallèles (23), la proposée possède à l'infini deux génératrices rectilignes distinctes contenant toujours son point double unique (20). C'est *un cylindre non tangent au plan de l'infini.*

$\mathfrak{q} = 3$. — La quadrique auxiliaire a son point double unique, non à l'infini (23) et coupe ainsi le plan de l'infini suivant une conique ne comprenant aucune droite; la proposée également : elle est donc *un cône proprement dit,* c'est-à-dire dont le sommet n'est pas à l'infini.

27. Pour $q = 4$, les hypothèses $\mathfrak{q} = 0$, $\mathfrak{q} = 1$ sont irréalisables parce qu'elles entraîneraient la première $q = 1$, la seconde $q = 2$ comme on le constatera sans peine. Il reste donc à examiner les suivantes :

$\mathfrak{q} = 2$. — La quadrique auxiliaire étant une paire de plans distincts, non parallèles, trace sur le plan de l'infini deux droites distinctes aussi et ces dernières ont d'ailleurs pour intersection mutuelle la trace (toujours réelle) sur le plan de l'infini de la droite des points doubles de la même quadrique auxiliaire. La proposée est ainsi *une surface (réelle) tangente au plan de l'infini au point où il est coupé par cette droite de points doubles.*

$\mathfrak{q} = 3$. — La quadrique auxiliaire étant un cône proprement dit coupe le plan de l'infini suivant une conique ne contenant aucune droite. La proposée de même; par suite, *elle n'est pas tangente au plan de l'infini.*

28. L'existence ou la non-existence de quelque *autre*, leur distribution quand il y en a plus d'un, sont des circonstances fort intéressantes en pratique, mais très accessoires en théorie. La considération de ces points comme *pôles du plan de l'infini non situés eux-mêmes à l'infini* lie étroitement les particularités qui les concernent à la classe de la quadrique, ainsi qu'à la distribution de ses points à l'infini. Pour en faire la discussion, il suffit de combiner les indications données au n° 17 et dans ceux qui précèdent celui-ci.

29. Il est évident que *les points (simples) de la quadrique* (1), *qui sont à l'infini, sont imaginaires ou réels, selon que la forme auxiliaire* $\mathfrak{L}$ *est définie ou indéfinie.*

CLASSIFICATION.

30. Chacune des propriétés particulières de la quadrique générale

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

dont l'existence a été reconnue possible dans les paragraphes précédents, constitue *un caractère simple ayant pour criterium unique la nullité ou les signes de quelques-unes des expressions que nous avons nommées les discriminants de la forme f.* Il suffit d'en former toutes les combinaisons admissibles pour obtenir les caractères composés distincts des espèces classiques.

$q =$	f est	D est	$\mathfrak{q} =$	$\mathfrak{f}$ est	
1			0		Plan double à l'infini (¹).
			1		Plan double non à l'infini.
2, f est	définie		1		Paire de plans imaginaires conjugués, parallèles (¹).
			2		Paire de plans imaginaires conjugués, concourants (²).
	indéfinie		0		Paire de plans réels dont un seul est à l'infini (³).
			1		Paire de plans réels parallèles.
			2		Paire de plans réels concourants.
3, f est	définie		2		Cylindre imaginaire.
			3		Cône imaginaire (⁴).
	indéfinie		1		Cylindre parabolique.
			2, $\mathfrak{f}$ est	définie	Cylindre elliptique.
				indéfinie	Cylindre hyperbolique.
			3		Cône réel.
4, f est	définie				Ellipsoïde imaginaire (¹).
	indéfinie, D est	< 0	2		Paraboloïde elliptique.
			3, $\mathfrak{f}$ est	définie	Ellipsoïde réel.
				indéfinie	Hyperboloïde à deux nappes.
		> 0	2		Paraboloïde hyperbolique.
			3		Hyperboloïde à une nappe.

(¹) L'équation $f = 0$ ne représente rien (géométriquement parlant).
(²) L'équation $f = 0$ ne représente qu'une droite.
(³) L'équation $f = 0$ ne représente qu'un plan.
(⁴) L'équation $f = 0$ ne représente qu'un point.

C'est ce qui est réalisé dans le Tableau dichotomique ci-contre; les caractères simples y sont indiqués dans l'ordre où décroît leur importance relativement à la structure analytique de la forme f. Nous appelons toujours q, D la classe et le déterminant fondamental de cette forme, $\mathfrak{L}$ la forme auxiliaire définie au n° 23 et $\mathfrak{q}$ sa classe.