NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BARISIEN

Solution analytique de la question de mathématiques proposée au concours d'admission à l'École polytechnique en 1892

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 441-446

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__441_0>

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1892 (¹);

Par M. BARISIEN.

I. Soient H et H′ les deux autres points d'intersection du cercle (C) avec l'hyperbole (Γ).

L'équation de l'hyperbole étant

$$(1) \qquad x^2 - y^2 = a^2,$$

si nous désignons par

$$(2) \qquad y - mx - p = 0,$$

$$(3) \qquad y + mx - q = 0,$$

les équations des deux droites DD′ et HH′, l'équation générale des coniques passant par les points D, D′, H, H′ est

$$\lambda(x^2 - y^2 - a^2) + (y - mx - p)(y + mx - q) = 0.$$

Cette conique est un cercle si

$$\lambda = \frac{1 + m^2}{2},$$

de sorte que l'équation du cercle DD′HH′ est

$$(x^2 + y^2)(1 - m^2) - 2m(p - q)x \\ - 2(p + q)y - (1 + m^2)a^2 + 2pq = 0.$$

Si nous exprimons que le centre de ce cercle est sur

(¹) *Voir* l'énoncé p. 259. Nous avons déjà inséré deux solutions géométriques de la même question (p. 262-267); M. le professeur Lemaire et M. Michel, lieutenant du Génie, nous ont aussi adressé une solution géométrique.

la droite (2), on trouve

$$q = 0.$$

L'équation du cercle (C) de l'énoncé est donc

$$(4)\qquad (x^2 + y^2)(1 - m^2) - 2p(y + mx) - a^2(1 + m^2) = 0.$$

La seconde sécante HH′ passe donc par le centre de l'hyperbole, quelle que soit la droite DD′.

Considérons maintenant une corde quelconque perpendiculaire à DD′ et dont l'équation soit

$$(5)\qquad y = -\frac{1}{m}x - h.$$

Cette corde rencontre DD′ en I, la circonférence aux points E et E′ et l'hyperbole en K et K′. Il faudrait démontrer que

$$\overline{IE}^2 = \overline{IE'}^2 = IK.IK'.$$

Cette propriété sera démontrée si nous faisons voir que les points E et E′ sont conjugués harmoniques de K et K′, ou bien que les droites OE, OE′ et OK, OK′ joignant le centre de l'hyperbole à E, E′, K, K′ forment un faisceau harmonique.

Or, l'équation donnant les coefficients angulaires de OK et OK′ est

$$(6)\qquad m^2(h^2 + a^2)\mu^2 + 2a^2 m\mu + a^2 - m^2 h^2 = 0.$$

Celle qui donne les coefficients angulaires de OE et OE′ est

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &m^2[(1 - m^2)h^2 - 2ph - a^2(1 + m^2)]\mu^2 \\ &\quad - 2m\mu(m^2 - 1)(ph + a^2) \\ &\quad + (1 - m^2)m^2h^2 - 2pm^2h - a^2(1 + m^2) = 0. \end{aligned}\right.$$

Si μ_1 et μ_2 sont les racines de (6) et μ_3 et μ_4 celles de (7), le faisceau O(EE′KK′) sera harmonique si la condition

$$(\mu_1 + \mu_2)(\mu_3 + \mu_4) = 2\mu_1\mu_2 + 2\mu_3\mu_4$$

est vérifiée. Cette vérification se fait sans aucune difficulté. La valeur commune des deux membres de cette relation a pour expression

$$\frac{-4a^2(m^2+1)(pk+a^2)}{m^2(k^2+a^2)[(1-m^2)k^2-2pk-a^2(1+m^2)]}.$$

II. Si la droite DD′ est telle que sa parallèle menée par le centre de l'hyperbole rencontre la courbe, la droite HH′ la rencontre aussi et alors les quatre points d'intersection de (C) et de (Γ) sont réels. Dans le cas contraire, les points H et H′ sont imaginaires.

Du reste, les coordonnées (α, β) du point H sont

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{1-m^2}}, \qquad \beta = \frac{-am}{\sqrt{1-m^2}}.$$

Elles ne sont réelles que si

$$m^2 < 1.$$

III. Lorsque m est constant, les deux sécantes DD′ et HH′ se rencontrent en un point qui est sur la droite fixe HH′. Le lieu des points de rencontre de DD′ et HH′ est donc la droite HH′ elle-même, dont l'équation est

$$y + mx = 0.$$

Il reste à trouver le lieu des points d'intersection des droites DH′ et HH′ ainsi que de DH et D′H′.

L'équation générale des coniques passant par les points D, D′, D′, H est

$$(8) \qquad \lambda(x^2-y^2-a^2)+(y+mx)(y-mx-p)=0.$$

En annulant le discriminant de cette équation, on trouve

$$(9) \qquad \lambda\left[\lambda^2-\lambda(1+m^2)+m^2-\frac{p^2}{4a^2}(1-m^2)\right]=0.$$

Cette équation donne les valeurs de λ correspondant aux sécantes d'intersection. Il n'y a pas lieu de tenir compte de la valeur $\lambda = 0$ qui correspond aux sécantes DD' et HH'.

Les coordonnées du centre de la conique (8) sont

$$(10) \qquad 2x(\lambda - m^2) - pm = 0,$$

$$(11) \qquad 2y(1 - \lambda) - p = 0;$$

de sorte que nous aurons le lieu des points de rencontre des autres sécantes, en éliminant λ et p entre (9), (10) et (11). Or l'équation (9) peut s'écrire

$$(12) \qquad (\lambda - m^2)(\lambda - 1) = \frac{p^2}{4a^2}(1 - m^2),$$

et, d'après (10) et (11),

$$(13) \qquad (\lambda - m^2)(1 - \lambda) = \frac{p^2 m}{4xy}.$$

En égalant les seconds membres de (12) et (13), l'élimination de λ et p se trouve toute faite, et l'on obtient pour le lieu des points de rencontre de DH' et D'H ainsi que de DH et D'H', la courbe

$$xy = \frac{a^2 m}{m^2 - 1}.$$

C'est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les axes de l'hyperbole (Γ).

IV. Désignons par (X_1, Y_1) les coordonnées du point A et par (X_2, Y_2), celles de B.

La tangente en H au cercle a pour équation

$$(14) \qquad y - \beta = \mu(x - \alpha),$$

dans laquelle

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{1 - m^2}}, \qquad \beta = -\frac{am}{\sqrt{1 - m^2}} = -m\alpha,$$

$$(15) \qquad \mu = -\left[\frac{\alpha(1 - m^2) - pm}{\beta(1 - m^2) - p}\right].$$

En tenant compte des valeurs de α et de β, cette valeur de μ peut s'écrire

$$\mu = \frac{a^2 + \beta p}{ma^2 + \alpha p}. \tag{15'}$$

L'équation aux abscisses des points d'intersection de (14) avec l'hyperbole (Γ) est

$$x^2(1 - \mu^2) - 2\mu(\beta - \mu\alpha)x - a^2 - (\beta - \mu\alpha)^2 = 0.$$

Comme α et X_1 sont racines de cette équation, on en déduit

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{2\mu(\beta - \mu\alpha)}{1 - \mu^2} - \alpha, \\ Y_1 &= \frac{2(\beta - \mu\alpha)}{1 - \mu^2} - \beta. \end{aligned}\right.$$

La tangente en H à l'hyperbole a pour équation

$$\alpha x - \beta y = a^2.$$

Donc elle est perpendiculaire à DD'. Par suite, le point B est le symétrique de H, par rapport à la droite DD'. On obtient alors pour les coordonnées X_2 et Y_2 de B

$$\left\{\begin{aligned} X_2 &= \frac{2(a^2 + \beta p)}{\alpha - \beta m} - \alpha, \\ Y_2 &= \frac{2(ma^2 + \alpha p)}{\alpha - \beta m} - \beta. \end{aligned}\right.$$

Le coefficient angulaire de la droite AB est, par suite,

$$\frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2} = \frac{(\alpha - \beta m)(\beta - \mu\alpha) - (1 - \mu^2)(ma^2 + \alpha p)}{\mu(\alpha - \beta m)(\beta - \mu\alpha) - (1 - \mu^2)(\alpha^2 + \beta p)}.$$

Or, d'après (15'),

$$a^2 + \beta p = \mu(ma^2 + \alpha p).$$

Il en résulte immédiatement que

$$\frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2} = \frac{1}{\mu}.$$

L'équation de la droite AB est donc

$$y - Y_1 = \frac{1}{\mu}(x - X_1)$$

ou

$$y + \beta = \frac{1}{\mu}(x + \alpha).$$

Elle passe donc par le point H' de coordonnées $(-\alpha, -\beta)$ qui est un point fixe.

Remarquons, en finissant, que le lieu des points d'intersection de DD' et de AB est une hyperbole équilatère, dont l'équation

$$(y - mx)(my + x) + 2ma^2 = 0$$

est aisée à trouver.