Nouvelles annales de mathématiques

Cl. Servais

Sur la courbure dans les sections coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 424-428

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__424_1>

SUR LA COURBURE DANS LES SECTIONS CONIQUES;

Par M. Cl. SERVAIS,
Professeur à l'Université de Gand.

1. Soient M un point d'une conique, T_a et T_b, N_a et N_b les points d'intersection de la tangente et de la normale en ce point, avec les axes de la courbe, μ le centre de courbure au point M. D'un point R de la droite T_aT_b, abaissons une perpendiculaire sur la polaire de ce point, rencontrant la normale N_aN_b au point R_1. La perpendiculaire RR_1 enveloppe une parabole (P), inscrite dans le quadrilatère formé par la tangente T_aT_b, la normale N_aN_b, et les deux axes de la conique considérée; le point μ est le point de contact de la droite N_aN_b avec cette parabole. On déterminera donc le point μ à l'aide du théorème de Brianchon. On obtient les propriétés suivantes :

La parallèle menée par le point M *à l'axe a et la* *perpendiculaire élevée au point* T_b *sur la tangente au point* M *se coupent sur le diamètre de la conique passant par le centre de courbure* μ.

Le centre de courbure μ, *le point* T_p *et la projection du point* N_a *sur le diamètre de la conique parallèle à la normale sont trois points en ligne droite.*

2. Deux tangentes à une parabole sont coupées par les autres tangentes en parties proportionnelles : donc

$$\frac{\mu N_a}{\mu N_b} = \frac{MT_a}{MT_b}.$$

Cette égalité donne plusieurs constructions du centre de courbure μ (MANNHEIM, *Géométrie descriptive,* p. 174).

3. Soient D et D_1 les points de rencontre de la tangente au point M avec les directrices, F et F_1 les foyers de la conique; les droites DF et D_1F_1 sont tangentes à la parabole (P); si S et S_1 sont les points d'intersection de ces droites avec la normale, on a

$$\frac{\mu S}{\mu S_1} = \frac{MD}{MD_1} = \frac{MF}{MF_1};$$

donc :

Sur les rayons vecteurs MF et MF_1 *on mène des perpendiculaires respectivement par les foyers* F *et* F_1 ; *ces droites coupent la normale en deux points* S et S_1 *tels que*

$$\frac{\mu S}{\mu S_1} = \frac{MF}{MF_1}.$$

De cette égalité on déduit aisément la formule connue

$$\rho = \frac{C'^2}{a \cos\varphi}.$$

4. Dans une hyperbole, le point de contact d'une tan-

gente est le milieu du segment II_1, intercepté sur cette droite par les asymptotes; les tangentes, menées par les points I et I_1 à la parabole (P), déterminent sur la normale N_aN_b deux points équidistants du point μ. Donc :

Dans une hyperbole, aux points où la tangente en M *rencontre les asymptotes, on élève des perpendiculaires à celles-ci; elles rencontrent la normale* N_aN_b *en deux points dont le milieu est le centre de courbure* μ *de la courbe au point* M.

5. Du point R abaissant, sur le diamètre OM, une perpendiculaire rencontrant la normale au point R_2, les points R_1 et R_2 décrivent deux ponctuelles semblables dans lesquelles μ et M sont deux points correspondants. Ces ponctuelles n'ont aucun point double situé à distance finie; elles sont donc identiques : par conséquent

$$R_1R_2 = \mu M.$$

On retrouve ainsi un théorème de M. Ribaucour (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2e série, t. VIII, p. 172).

6. Soient H et H_1 deux points de l'un des axes (par exemple, N_aT_a) conjugués par rapport aux foyers réels ou imaginaires, situés sur cet axe. On sait que deux droites conjuguées passant par ces points sont rectangulaires. Cela étant, la droite RH coupe la normale en un point R_3, et les couples R_1R_3 engendrent deux ponctuelles projectives, dans lesquelles μ et M sont deux points correspondants. Le point limite J de la seconde ponctuelle est le pied de la perpendiculaire abaissée du point H sur la normale. L'un des points doubles est le point N_a et la propriété des points H et H_1, rappelée ci-

dessus, nous montre que le second point double E est situé sur la perpendiculaire abaissée du point H sur la droite MH_1. On a donc

$$(\mu N_a E \infty) = (M N_a E J)$$

ou

$$\frac{\mu E}{ME} = \frac{N_a J}{MJ}.$$

Élevons au point N_a une perpendiculaire sur la normale, rencontrant la droite MH au point K; on a

$$\frac{\mu E}{ME} = \frac{KH}{MH},$$

égalité qui montre que la parallèle menée par le point K à la droite HE passe par le centre de courbure μ. Donc :

Si H *et* H_1 *sont deux points conjugués par rapport aux foyers réels ou imaginaires situés sur l'axe a, la perpendiculaire élevée au point* N_a *sur la normale au point* M *coupe les droites* MH *et* MH_1 *en deux points* K *et* K_1 *tels que le centre de courbure* μ *est le point de rencontre des hauteurs du triangle* MKK_1.

Si l'on suppose les points H et H_1 confondus en F, on retrouve une construction connue; il en est de même si H est le centre de la courbe.

7. La perpendiculaire DF élevée au foyer F sur le rayon vecteur MF est tangente à la parabole (P). Cette droite peut donc remplacer l'un des axes de la conique ou la droite T_aT_b dans la détermination du centre de courbure μ, à l'aide du théorème de Brianchon. On obtient ainsi les théorèmes suivants :

Soient G *et* G_1 *les points d'intersection de la droite* DF *avec la normale* N_aN_b *et l'axe b, les parallèles menées de ces points, respectivement à l'axe a et à la normale* N_aN_b, *se coupent sur le diamètre* O μ.

Les parallèles menées par les points M *et* D *respectivement à l'axe a et à la normale se coupent sur la droite* Fμ.

Cette dernière propriété subsiste si l'on remplace les points M et D respectivement par les points N_b et G_1.

L'emploi de la parabole (P) conduit à un grand nombre d'autres propriétés ; mais nous terminerons cette Note en signalant brièvement un moyen d'étendre les recherches qui précèdent. Nous avons trouvé deux ponctuelles semblables (R) et (R_1); si par le point R on mène la seconde tangente à la conique (ou à un cercle tangent à MR), cette tangente et ses analogues déterminent sur une tangente à cette conique (ou à ce cercle) une ponctuelle R' projective à la ponctuelle (R) et par conséquent projective à la ponctuelle (R_1). Dans ces ponctuelles (R') et (R_1), on détermine les points limites, le point qui correspond au centre de courbure μ, et l'on applique les diverses propriétés des ponctuelles projectives.