F. Farjon

Sur le quadrilatère

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 41-47

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__41_1>

SUR LE QUADRILATÈRE;

PAR M. F. FARJON.

1. Soit ABCD un quadrilatère gauche. De deux sommets consécutifs A et B, menons des plans respectivement perpendiculaires aux côtés opposés BC et AD. Ces plans se couperont suivant une droite I_1 parallèle à la plus courte distance des deux droites BC et AD. Construisons de la même façon les trois autres droites I_2, I_3, I_4.

Ces quatre droites sont situées dans un même plan P_1 *perpendiculaire à la droite* RS *qui joint les milieux des deux diagonales* AC *et* BD.

Nous appellerons le plan P_1 *plan orthique* du quadrilatère ACBD.

On voit que la droite qui joint les milieux des diagonales est perpendiculaire aux deux plus courtes distances des couples de côtés opposés.

2. Les quatre points A, B, C, D déterminent deux autres quadrilatères gauches ACBD et ABDC.

Chacun d'eux a un plan orthique perpendiculaire, le premier P_2 à la droite MN qui joint les milieux de AB et de DC, le second P_3 à la droite PQ qui joint les milieux de AD et de BC.

Les trois droites MN, PQ, RS se rencontrent au centre de gravité G du quadrilatère.

Les trois plans P_1, P_2, P_3 forment un angle trièdre de sommet Σ, que nous appellerons *centre orthique* du tétraèdre ABCD. Ce trièdre a ses arêtes respectivement parallèles aux plus courtes distances des couples d'arêtes opposées du tétraèdre. Le trièdre G, formé par les médianes MN, PQ, RS, est son supplémentaire.

3. Marquons, sur deux côtés opposés BC, AD du premier quadrilatère, deux points K et L, divisant ces côtés en parties proportionnelles. Si, de chacun des points K et L, on mène un plan perpendiculaire sur le côté opposé, l'intersection de ces plans sera située dans le plan P_1, ainsi :

Le plan orthique est le lieu des intersections deux à deux des plans menés perpendiculairement aux côtés opposés du quadrilatère par les points divisant ces côtés en parties proportionnelles.

4. Autrement :

Si l'on considère deux génératrices rectilignes de même système d'un paraboloïde hyperbolique, et que, par chacun des deux points où une génératrice *quelconque du second système rencontre ces deux directrices, on mène un plan perpendiculaire à la directrice opposée, l'intersection de ces deux plans, parallèle à la plus courte distance des deux directrices, sera constamment située dans un même plan perpendiculaire à l'axe de la surface.*

Ce plan, plan orthique de l'un quelconque des quadrilatères que forment deux couples de génératrices de systèmes contraires, sera le *plan orthique* du paraboloïde.

5. Le plan orthique du paraboloïde passe à une distance du sommet égale à la différence des paramètres des deux paraboles principales.

6. Il résulte de ce qui précède que :

Le lieu des points du paraboloïde, où les génératrices de systèmes opposés se coupent à angle droit, est l'hyperbole suivant laquelle le plan orthique coupe la surface.

7. Problème. — *Construire le sommet et l'axe du paraboloïde hyperbolique déterminé par un quadrilatère gauche donné.*

L'axe est parallèle à la droite qui joint les milieux des diagonales. Que l'on coupe la figure par un plan perpendiculaire à cette droite ; les quatre points où ce plan rencontre les côtés du quadrilatère, et le point où il rencontre une cinquième génératrice, par exemple la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés, déterminent une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux deux génératrices qui se croisent au sommet de la surface, et la direction de ces asymptotes s'obtiendra par une construction connue (Chasles, *Sect. con.*, § 13).

Cela fait, par deux côtés opposés du quadrilatère, on conduira deux plans parallèles à celle de ces deux asymptotes qui n'est pas parallèle à leur plan directeur; l'intersection de ces deux plans sera l'une des génératrices passant par le sommet. On obtiendra de même la seconde et, par suite, le sommet lui-même et l'axe du paraboloïde.

8. La droite MN qui joint les milieux des côtés opposés AB et CD appartient à la fois au système des droites divisant en parties proportionnelles les côtés AB et DC du quadrilatère ABCD et les côtés AB et CD du quadrilatère ABDC. Il en résulte que l'intersection des deux plans menés perpendiculairement de M sur CD et de N sur AB appartient aux deux plans orthiques P_1 et P_3 : elle est donc leur intersection. Ainsi les arêtes du trièdre Σ ne sont autre chose que les intersections deux à deux des plans menés des milieux de chacune des arêtes du tétraèdre ABCD perpendiculairement à l'arête opposée. Il s'ensuit que :

Ces six plans se coupent en un même point qui est le centre orthique du tétraèdre.

Cette proposition se démontre, d'ailleurs, directement sans difficulté.

9. Le centre orthique est le symétrique du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre par rapport au centre de gravité.

Il est le centre de l'hyperboloïde gauche déterminé par les quatre hauteurs du tétraèdre (*théorème de Monge*).

10. Les deux paraboloïdes hyperboliques déterminés

par les quadrilatères ABCD, ABDC, ont trois génératrices communes : les deux droites AB et CD du premier système et la droite MN du second. Ils sont tangents en M et en N, ainsi :

Les trois paraboloïdes hyperboliques déterminés par les trois couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre ont deux à deux un double contact aux points milieux des arêtes opposées.

Ces trois surfaces ont cinq points communs A, B, C, D et G.

Deux quelconques ont cinq points communs et deux plans tangents communs.

11. Il est intéressant de voir ce que donnent les propositions précédentes lorsque le quadrilatère ABCD devient plan.

On retrouve tout d'abord ce théorème connu : que les points de concours des hauteurs des quatre triangles que forment les côtés du quadrilatère prolongés sont sur une même droite L_1 perpendiculaire à la droite RS qui joint les milieux des diagonales. L_1 est l'*axe orthique* du quadrilatère.

12. Les quatre points A, B, C, D déterminent deux autres quadrilatères ACBD, ABDC qui ont chacun leur axe orthique L_2, L_3.

Ces trois droites L_1, L_2, L_3 forment un triangle $\alpha\beta\gamma$. Ici le centre orthique est à l'infini.

13. *Le centre de gravité des points de concours des hauteurs des douze triangles qui ont pour sommets les points de rencontre des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère, et pour bases les côtés et les*

diagonales, coïncide avec le centre de gravité du triangle $\alpha\beta\gamma$.

14. *L'axe orthique* L_1 *est le lieu des points de concours des hauteurs de deux séries de triangles qui ont pour sommets les points de rencontre des couples de côtés opposés* AD *et* BC, AB *et* DC, *et pour bases des droites divisant ces mêmes côtés en parties proportionnelles.*

Propriété analogue pour les axes L_2 et L_3.

15. La droite MN qui joint les milieux de deux côtes opposés se trouve faire partie de deux systèmes de division, en sorte que les perpendiculaires abaissées du point M sur CD et du point N sur AB se coupant en même temps sur l'axe L_1 et sur l'axe L_3 se coupent à l'intersection β de ces axes.

De même pour les sommets α et γ.

16. *Si le quadrilatère* ABCD *est inscriptible au cercle, les axes* L_1, L_2, L_3 *passent respectivement par les points de rencontre des diagonales et des couples de côtés opposés.*

17. Et réciproquement : *Si cette condition est remplie pour l'un des axes* L_1, L_2 *ou* L_3, *le quadrilatère est inscriptible.*

18. Il en résulte que :

Si le quadrilatère est inscriptible, les trois droites L_1, L_2, L_3 *concourent en un même point, centre orthique du quadrilatère.*

Ce point est le symétrique du centre du cercle par rapport au centre de gravité du quadrilatère.

Ce théorème s'établit d'ailleurs directement de la façon la plus simple.

19. Réciproquement, *si les trois axes* L_1, L_2, L_3 *concourent en un même point, le quadrilatère est inscriptible.*

20. Cette propriété caractéristique du quadrilatère inscriptible est exprimée analytiquement par la formule donnée précédemment (*Question* 1589, t. VII, 3e série, p. 502).