Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 37-41

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__37_1>

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie des nombres; par *Édouard Lucas.* — Tome I : *Le calcul des nombres entiers. Le calcul des nombres rationnels. La divisibilité arithmétique.* 1 vol. gr. in-8° de xxxiv-520 pages. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. Prix : 15 fr.

L'existence scientifique d'Édouard Lucas, si prématurément enlevé à l'affection de sa famille et de ses amis, a été consacrée surtout à l'étude de l'arithmétique supérieure. A côté de recherches très intéressantes sur les autres branches des mathématiques, et d'œuvres de vulgarisation vraiment remarquables, il a produit, dans la plupart des recueils périodiques d'Europe et des États-Unis, de très nombreux travaux sur la théorie des nombres. Il était en correspondance avec les plus illustres représentants de cette science, si française par ses origines, et malheureusement si délaissée en France de nos jours.

Unissant au plus haut degré de grandes facultés d'invention à une érudition merveilleuse, il était préparé, mieux que personne, à la publication d'une œuvre comme celle que nous voulons analyser aujourd'hui, et qui est malheureusement la dernière sortie de sa plume, puisque la mort est venue le prendre quelques semaines à peine après l'apparition de ce premier volume.

En dehors des regrets que fait toujours éprouver la perte d'un esprit puissant et original, on pouvait être en droit de déplorer qu'une œuvre de cette valeur restât inachevée. Cependant, à ce point de vue spécial, il importe de constater deux faits; le premier, c'est que les manuscrits laissés par Lucas après sa mort, ainsi que ses nombreux mémoires sur la théorie des nombres, pourront permettre de constituer et de publier un second volume, assurément moins étendu que celui qu'il avait projeté, mais néanmoins suffisant pour compléter l'ouvrage sur les points essentiels; le second fait, c'est que le volume paru forme à lui seul une œuvre complète, et d'une valeur considérable, ainsi qu'on pourra s'en rendre compte, je l'espère, par l'exposé qui va suivre.

J'ai déjà eu l'occasion de dire, sous une forme trop concise peut-être, et au risque de ne pas me faire entièrement comprendre, que ce premier volume, en dépit de son titre, était moins le commencement d'une théorie des nombres qu'une introduction à cette science. C'est précisément là ce qui lui donne un caractère d'unité; c'est là ce qui fait qu'en dépit des apparences nous avons devant nous une œuvre formant un tout; moins achevée que si l'auteur avait pu y ajouter les compléments préparés dans son esprit, mais telle cependant que personne désormais ne pourra étudier la théorie des nombres et écrire sur ce sujet sans avoir lu et médité l'ouvrage d'Édouard Lucas.

Le livre débute par une préface contenant de précieuses indications historiques, et dans laquelle l'auteur établit la ligne de démarcation, essentielle selon lui, entre l'algèbre proprement dite et la théorie des nombres. C'est dans la notion de discontinuité qu'il trouve le caractère de cette dernière science.

Dans une remarquable introduction se trouve ensuite rapidement étudiée la filiation des idées arithmétiques, leurs origines et leurs applications. Ce n'est pas sans un certain étonnement que beaucoup de lecteurs s'apercevront que des théories, paraissant exclusivement abstraites au premier coup d'œil, sont souvent d'un intérêt pratique considérable, et peuvent même devenir d'un très grand secours pour des usages industriels.

Ainsi que l'indique le titre, reproduit en tête de cet article, l'ouvrage comprend trois grandes divisions ou *livres*. Le livre I traite des nombres entiers, et se divise en huit chapitres : addition des nombres entiers; soustraction des nombres entiers; multiplication des nombres entiers; division et classification des entiers; les nombres figurés; l'analyse combinatoire; la géométrie de situation; la multiplication algébrique.

Sur ces sujets, en apparence si simples, on trouvera, dans les chapitres que nous venons d'énumérer, une abondance de renseignements; nous citerons, en particulier, le triangle arithmétique, les tableaux de sommes et de différences, les systèmes de numération, la notion des congruences, les permutations figurées, les échiquiers de M. Delannoy, les réseaux et régions.

Le livre II comprend dix chapitres, intitulés : les nombres fractionnaires; le calcul des probabilités; la division algébrique; les polynômes dérivés; le calcul symbolique; sommation des puissances numériques; les fonctions symétriques; les déterminants; les suites récurrentes linéaires; les fonctions numériques du second ordre. On y rencontre d'intéressantes propriétés des polynômes, des données générales sur les probabilités, sur l'interpolation, sur les dérivées des polynômes à une ou plusieurs variables; le calcul symbolique, dont Lucas a fait un si grand et si habile usage, est étudié avec beaucoup de soin, ainsi que les applications de ce calcul aux nombres de Bernoulli, et à plusieurs problèmes célèbres sur les permutations figurées; les sommations des puissances numériques constituent encore une application du calcul symbolique, et ramènent l'auteur aux nombres de Bernoulli et d'Euler, et aux suites de Cesaro. Le chapitre des fonctions symétriques résume les travaux les plus essentiels concernant cette belle théorie; de même, en ce qui concerne les déterminants et les équations linéaires. A propos des suites récurrentes, Lucas reproduit la substance de ses recherches sur les travaux de Léonard de Pise (Fibonacci) et sa remarquable théorie des fonctions numériques du second ordre U_n et V_n, qui offrent avec les fonctions circulaires de frappantes analogies. C'est une étude pleine de profondeur et d'originalité, qui lui appartient en propre, et qui peut devenir entre des mains habiles un instrument d'une grande puissance pour des recherches nouvelles. Nous croyons savoir que l'extension de ces fonctions au troisième ordre était l'un des rêves scientifiques de l'auteur; il fondait sur des recherches dans cette direction les plus belles espérances pour la découverte de nouvelles et importantes propriétés arithmétiques. Nous attirons sur ce point l'attention des jeunes géomètres qui se sentiraient tentés par l'étude de l'arithmétique supérieure, et voudraient se faire les continuateurs de Lucas.

Le livre III est plus exclusivement arithmétique que les précédents; il comprend : codiviseurs et comultiples; les nombres premiers; les diviseurs des nombres; de l'indicateur; les restes; les fractions continues.

Nous ne saurions assez recommander l'emploi de ces termes de codiviseurs et comultiples que propose ici Lucas, et qui, nous l'espérons, deviendront bientôt d'un usage courant. Sur la distribution des nombres premiers, l'auteur donne un résumé des connaissances, bien peu étendues malheureusement, qui sont aujourd'hui acquises à la science; la divisibilité des factorielles, les beaux théorèmes de MM. Tchebycheff et de Polignac, les nombres parfaits, aliquotaires, amiables, les diviseurs des nombres, les théorèmes de Dedekind, Liouville et Dirichlet sont présentés par lui sous une forme concise et très claire cependant.

L'indicateur, suivant l'heureuse expression de Cauchy, est l'expression $\varphi(n)$ du nombre des entiers $1, 2, \ldots, n$ qui sont premiers à n. C'est une notion très intéressante en théorie des nombres, et que Lucas étudie avec grand soin, en la généralisant à divers points de vue. On verra figurer dans ce chapitre des théorèmes d'un grand intérêt, parmi lesquels plusieurs sont inédits et ne pourraient se trouver dans aucun autre ouvrage. Le chapitre des restes comprend une première étude sommaire des congruences, et de nombreuses applications, parmi lesquelles nous retenons les théorèmes de Fermat, de Wilson, de Staudt et Clausen, etc. La théorie des fractions continues est rapidement étudiée en elle-même, pour arriver aussitôt à des applications arithmétiques, et spécialement à l'intercalation et à la médiation des suites, et à l'analyse indéterminée du premier degré.

Des *notes et additions*, terminant le volume, se rapportent : à la partition des polygones; aux problèmes des rencontres et des ménages; aux nombres d'Hamilton; aux réseaux d'un quinconce; à la sommation des indicateurs; aux permutations circulaires avec répétition; aux restes du triangle arithmétique; aux nombres de Clausen et de Staudt; à l'extraction des racines, et aux réduites intermédiaires.

Un des caractères particuliers de l'ouvrage dont il s'agit consiste dans l'abondance extraordinaire des questions traitées ou indiquées sous le titre d'*exemples*. A tout instant, on voit énoncer des applications variées, souvent inattendues; un développement sobre, au besoin quelques lignes seulement, apprennent au lecteur où en est l'état actuel de la question qu'on vient d'indiquer. Pour employer une comparaison élégante formulée par l'un des amis de l'auteur, et que nous avons recueillie, il semble qu'on visite un bel édifice, et qu'à chaque pas des fenêtres présentent à vos yeux des paysages variés, pleins d'attrait, aux horizons plus ou moins lointains, et dont l'aspect provoque à des excursions nouvelles.

Lucas n'avait certes pas la prétention de dire le dernier mot sur la théorie des nombres; il savait, au contraire, combien est encore immense le champ des vérités arithmétiques inconnues. Mais il aimait cette science avec passion; il lui avait consacré la meilleure part de sa vie scientifique; et sa grande ambition était de la faire aimer et connaître.

Si parmi la jeune génération de savants français, qui a l'avenir devant elle, il s'en trouve quelqu'un pour essayer de reprendre la tradition si tristement interrompue, il contribuera à la gloire scientifique de notre pays, et rendra du même coup le plus juste hommage à la mémoire d'un géomètre dont les travaux n'ont pas été appréciés de son vivant à leur véritable valeur, mais que sa *Théorie des nombres* classe parmi les maîtres de la science.

C.-A. LAISANT.