Nouvelles annales de mathématiques

Loucheur

Sur le lieu des sommets des angles constants circonscrits ou normaux à une épicycloïde. Application à la démonstration purement géométrique de propriétés de la cycloïde, de la cardioïde et des hypocycloïdes à trois et quatre rebroussements

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 374-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__374_1>

SUR LE LIEU DES SOMMETS DES ANGLES CONSTANTS CIRCONSCRITS OU NORMAUX A UNE ÉPICYCLOIDE. APPLICATION A LA DÉMONSTRATION PUREMENT GÉOMÉTRIQUE DE PROPRIÉTÉS DE LA CYCLOIDE, DE LA CARDIOIDE ET DES HYPOCYCLOIDES A TROIS ET QUATRE REBROUSSEMENTS;

PAR M. LOUCHEUR,
Élève à l'École Polytechnique.

Dans son *Aperçu historique* (2e édition, p. 125; 1875), Chasles a *énoncé* que le lieu des sommets des angles constants circonscrits à une épicycloïde ordinaire était une épicycloïde.

Nous allons donner de ce théorème une démonstration qui nous permettra de retrouver géométriquement des propriétés de quelques courbes remarquables.

Mais, au préalable, nous allons faire une petite remarque de Géométrie cinématique, qui nous servira plusieurs fois par la suite.

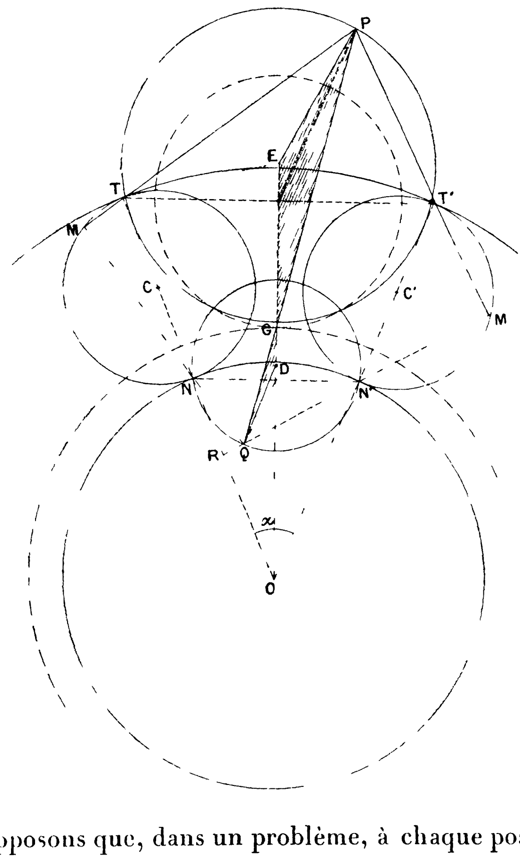
Remarque de Géométrie cinématique.

Soit un cercle mobile C *roulant* sur un cercle fixe O, et soit M un point invariablement lié à ce cercle.

(1) On trouvera, dans le Mémoire déjà cité de M. Goursat, cette formule, à laquelle il parvient par d'autres considérations.

Soit un second cercle fixe, de même centre O, de rayon quelconque $O\gamma$, et un second cercle mobile, tangent à ce cercle $(O, O\gamma)$ et de centre γ.

Fig. 1.



Supposons que, dans un problème, à chaque position du cercle C corresponde une position du cercle γ; à chaque position du point M une position d'un point μ; supposons de plus que l'on ait les quatre conditions

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{O\nu}{\nu\gamma} = \frac{ON}{NC},\\ &\widehat{MCN} = \widehat{\mu\gamma\nu} - \text{const.},\\ &\mu\gamma = \text{const.},\\ &\text{angle } \widehat{CO\gamma} = \text{const.}\end{aligned}\right.$$

Je dis que le cercle (γ) roule sur le cercle $(O, O\nu)$.

En effet (γ) roulera sur $(O, O\nu)$ si l'on a, en appelant $d\nu$ un déplacement angulaire quelconque du point de contact ν,

$$(1) \qquad O\nu \times d\nu = \nu\gamma \times d(\widehat{\mu\gamma\nu}).$$

D'autre part, (C) roule sur (O). On a donc

$$(2) \qquad ON \times d(N) = CN \times d(\widehat{MCN}).$$

On voit donc qu'à cause de la relation (2) et des conditions supposées la relation (1) est satisfaite.

Donc le cercle (γ) roule sur le cercle $(O, O\nu)$.

THÉORÈME. — *Le lieu des sommets des angles constants circonscrits à une épicycloïde ordinaire est une épicycloïde.*

Soient deux positions C et C' du cercle mobile, roulant sur le cercle O; M et M' les positions correspondantes du point décrivant l'épicycloïde; MT et M'T' les tangentes à la courbe se coupant en P; MN, M'N' les normales se coupant en Q.

1° Évaluons l'angle $\widehat{TOT'}$, que nous désignerons par (α), en fonction des angles $\widehat{MTN}$ ou (φ) et $\widehat{M'T'N'}$ ou (φ').

Soient (R) le rayon ON, (r) le rayon CN. On a

$$\alpha = \widehat{NRN'} - \widehat{ONR},$$

ou

$$\alpha = (\pi - \widehat{RNQ} - \widehat{NQR}) - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi'\right).$$

$\widehat{NQR}$ est l'angle des deux tangentes MT et M'T', angle que nous désignerons par θ; d'où

(3) $$\alpha = \varphi + \varphi' - \theta.$$

D'autre part, le cercle C roulant sur le cercle O, on a

(4) $$2r[\pi - (\varphi + \varphi')] = R\alpha:$$

d'où

(5) $$\alpha = \frac{2r(\pi - \theta)}{R + 2r}.$$

Donc, si θ est constant, quel que soit le point M considéré, α est aussi constant.

2° En second lieu, menons PQ qui est la normale au lieu cherché, et traçons les cercles circonscrits aux triangles TPT' et NQN'.

Soient E et D leurs centres et soit G le point de rencontre de PQ et de EDO.

D'après ce que nous venons de voir, les longueurs TT' et NN' sont constantes.

De cette propriété, et de ce que les angles en P et Q sont supplémentaires, on déduit immédiatement que les rayons EP, DQ ont des longueurs constantes, sont parallèles, et que l'on a

$$\frac{EP}{DQ} = \frac{TT'}{NN'} = \frac{R - 2r}{R}.$$

Par suite, les deux triangles PEG et QDG sont semblables, ce qui donne

$$\frac{EG}{GD} = \frac{EP}{DQ} = \frac{R + 2r}{R},$$

et, comme les longueurs OD, OE, DE sont fixes, il en résulte que OG et GE sont constants.

Je dis que le rapport $\frac{OG}{GE}$ est égal à $\frac{R}{r}$.

On trouve, en effet, très facilement les expressions suivantes

$$OD = R\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cot\theta\right),$$

$$DE = 2r\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cot\theta\right)$$

d'où l'on déduit

$$OG = \left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cot\theta\right)\frac{R(R + 2r)}{R + r},$$

$$EG = \left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cot\theta\right)\frac{r(R + 2r)}{R + r}.$$

Donc

$$\frac{OG}{GE} = \frac{R}{r}.$$

3° Il est également très facile de voir que

$$\widehat{PEG} = \widehat{MCN} + \text{const.}$$
$$= \pi + 2\varphi - (\alpha + \theta).$$

4° On en conclut que toutes les conditions énoncées dans la remarque préliminaire de Géométrie cinématique sont remplies et le point P engendre une épicycloïde, allongée ou raccourcie, le cercle fixe étant le cercle (O, OG), le cercle mobile étant le cercle (E, EG).

Le théorème est donc démontré.

Il est bien évident que l'on peut recommencer la même démonstration dans le cas d'une *hypocycloïde*, c'est-à-dire quand le cercle C roule à l'intérieur du cercle O, et trouver comme précédemment les éléments de l'hypocycloïde lieu cherché.

Nous insisterons, en particulier, sur ce que pour la valeur de l'angle α, il suffit, dans ce cas, de remplacer $R + 2r$ par $R - 2r$ dans l'expression trouvée précédemment. On réunira les deux cas dans l'énoncé suivant :

Considérons le second cercle fixe auquel reste tangent le cercle mobile engendrant $\begin{matrix}\textit{l'hypocycloïde.}\\ \textit{l'épicycloïde.}\end{matrix}$ *Soit* T *un point pris sur ce cercle fixe et* M *le point correspondant de la courbe; on trouvera le point* T′ *de contact d'un cercle mobile donnant lieu à une tangente faisant avec celle en* M *l'angle* θ *donné, en prenant sur ce cercle fixe un arc égal à* $2r(\pi - \theta)$.

Application à la cycloïde.

Les formules données précédemment pour les quantités caractéristiques de l'épicycloïde lieu de P montrent que, quand le rayon R est infini, le lieu de P est une cycloïde allongée, ordinaire ou raccourcie.

La distance TT′ est alors égale à

$$2r(\pi - \theta).$$

Application à la cardioïde.

On sait que la *cardioïde* est une épicycloïde ordinaire où $R = r$.

Un limaçon de Pascal est une épicycloïde non ordinaire correspondante.

Théorème I. — *Le lieu des sommets des angles* *constants circonscrits à une cardioïde est un limaçon de Pascal.*

En effet, le rapport des rayons des deux cercles fournissant l'épicycloïde, lieu cherché, est (comme on l'a vu précédemment) égal à

$$\frac{R}{r},$$

c'est-à-dire l'unité dans le cas actuel.

Théorème II. — *Étant donnée une tangente* MP *à la cardioïde, il existe trois tangentes perpendiculaires à* MP, *et deux autres tangentes parallèles à cette droite. Si l'on joint le point de rebroussement* A *de la cardioïde aux six points de contact, les six droites obtenues font entre elles* 60°.

Pour démontrer ce théorème, bien connu, il suffit de supposer θ égal à 90°. La formule

$$\alpha = \frac{2r(\pi - \theta)}{R + 2r}$$

donne alors

$$\alpha = 60°.$$

Si l'on joint AM et AM′, l'angle $\widehat{MAM'}$ est égal à l'angle TOT′ ou à 60°, ce qui démontre le théorème.

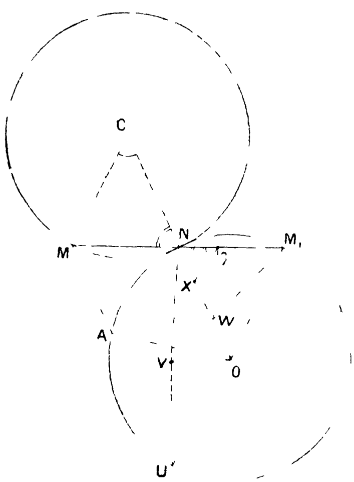
Théorème III. — *La développée de la cardioïde est une cardioïde trois fois plus petite.*

Nous allons démontrer cette propriété, bien connue également, en nous appuyant sur la remarque de Géométrie cinématique posée au début de cette étude.

Cherchons d'abord le centre de courbure de la cardioïde en M (*fig.* 2). En appliquant pour trouver ce point la méthode exposée dans le *Cours de Géométrie* *cinématique* de M. Mannheim on obtient la construction suivante :

On mène NU *perpendiculaire à* NM_1 ; *on mène* OV *parallèle à* NM_1 ; *on joint* VM_1 *qui rencontre* ON *en* W;

Fig. 2.



on projette W *en* γ *sur* NM_1. *Le point* γ *est le point cherché.*

Le triangle NUM_1 donne de suite

$$N\gamma = \frac{2}{3}\,MN,$$

propriété analogue à celle du centre de courbure de la cycloïde.

Conclusion. — Le lieu du point W est un cercle de rayon $\frac{r}{3}$.

Décrivons le cercle sur NW comme diamètre. Appelons X son centre. On a

$$\gamma XW = \pi - \widehat{MCN}.$$

Donc toutes les conditions de la remarque préliminaire sont remplies : le cercle (N, γ, W) roule sur le cercle (O, OW), et le point γ qui est sur ce cercle décrit une cardioïde.

THÉORÈME IV. — *La longueur de la cardioïde est de huit fois le rayon du cercle qui l'engendre.*

Ce théorème se déduit immédiatement du précédent, au moyen de la relation connue entre la variation de longueur du rayon de courbure et la longueur de l'arc de développée correspondante.

Autre application de la formule donnant la valeur de l'angle α.

THÉORÈME GÉNÉRAL SUR LES ÉPICYCLOIDES ET HYPOCYCLOIDES A n REBROUSSEMENTS. — *Si l'on fait tourner autour du centre du cercle fixe un angle égal à celui de deux tangentes consécutives de rebroussement, c'est-à-dire égal à $\frac{2\pi}{n}$, l'angle des tangentes à la courbe, aux deux points où elle est rencontrée par les deux côtés de l'angle mobile, est aussi égal à $\frac{2\pi}{n}$.*

Supposons R égal à nr et rappelons la formule

$$(1)\ \alpha = \frac{2r(\pi - \theta)}{R \pm 2r}.$$

Supposons

$$\theta = \frac{2\pi}{n}.$$

On déduit immédiatement

$$\theta = \frac{2\pi}{n}.$$

Ainsi, si l'angle TOT' est égal à $\frac{2\pi}{n}$, l'angle des deux tangentes MT, M'T' est aussi égal à $\frac{2\pi}{n}$.

Mais il est évident que, *puisque* $\frac{2\pi}{n}$ *est l'angle des deux tangentes de rebroussement consécutives*, l'angle MOM' est aussi égal à $\frac{2\pi}{n}$.

Le théorème est donc démontré.

Application.—Considérons une hypocycloïde à quatre rebroussements. On retrouve alors un théorème trouvé et démontré *analytiquement* par M. Rat (*Journal de Mathématiques spéciales*; 1887) :

Si l'on fait tourner un angle droit autour du centre de la courbe, les tangentes aux points de rencontre des côtés avec la courbe sont rectangulaires.

Remarque.— On eût pu regarder ce théorème comme évident, car on peut dire qu'une épicycloïde à n rebroussements est (si l'on peut ainsi parler) une courbe périodique de période angulaire égale à $\frac{2\pi}{n}$.

On a voulu, en le démontrant comme on l'a fait, donner une simple application de la formule générale fournissant la valeur de l'angle α.

Hypocycloïde à trois rebroussements.

Enfin, on nous permettra de citer encore comme application de cette même formule la démonstration de la propriété suivante : le cercle inscrit et le cercle passant par les points de rebroussement de l'hypocycloïde à trois rebroussements sont les lieux des sommets des angles droits circonscrits et normaux à cette courbe.

Il suffit de remarquer que dans ce cas particulier de

$$R = 3r \qquad \text{et} \qquad \theta = 90^\circ,$$

on a

$$\alpha = 180^\circ.$$

Une simple inspection de la figure permet alors de retrouver cette propriété et plusieurs autres de cette courbe remarquable.