NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. LEFÈVRE

La symétrie en coordonnées polaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 353-374

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__353_0>

LA SYMÉTRIE EN COORDONNÉES POLAIRES (1);

PAR M. J. LEFÈVRE,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée d'Amiens.

DEUXIÈME PARTIE.

Nous allons chercher la forme analytique générale des équations des courbes qui présentent les symétries que nous venons d'étudier. Nous supposerons encore la courbe obtenue tout entière par une variation limitée de ω : soit $2\mu\pi$, soit $(2\mu+1)\pi$.

On doit donc avoir, si $f(\rho, \omega) = 0$ est l'équation de la courbe,

$$f(\rho, \omega) \equiv k.f(\rho, \omega + 2\mu\pi) \quad (2)$$

ou bien

$$f(\rho, \omega) \equiv k' f[-\rho, (2\mu+1)\pi + \omega].$$

SECTION I. — AXES DE SYMÉTRIE.

Considérons un rayon principal de la première espèce.

On doit avoir

$$f(\rho, \alpha + \omega) \equiv \eta f(\rho, \alpha - \omega).$$

Nous *supposerons* la fonction f telle que *le facteur* η *soit une constante.* L'identité ayant lieu quels que

(1) Voir même Tome, p. 302.

(2) Le facteur k peut être une constante ou une fonction de ρ et ω. Par exemple, si f était par rapport à la variable ω une fonction doublement périodique de deuxième degré ayant $2\mu\pi$ pour une de ses périodes, k serait constant. Si c'était une fonction doublement périodique de troisième espèce, on aurait $k = e^{\alpha\omega + b}$.

soient ρ et ω subsistera si l'on remplace ω par $-\omega$; on a donc

$$f(\rho, \alpha - \omega) \equiv \eta f(\rho, \alpha + \omega);$$

faisons le produit

$$f(\rho, \alpha + \omega) \equiv \eta^2 f(\rho, \alpha + \omega).$$

Ceci exige

$$\eta^2 = 1, \qquad \eta = \pm 1.$$

Mais j'observe d'abord qu'on ne peut avoir ici $\eta = -1$, car pour $\omega = 0$, il viendrait

$$f(\rho, \alpha) \equiv -f(\rho, \alpha) \qquad \text{ou} \qquad f(\rho, \alpha) \equiv 0,$$

quel que soit ρ, tous les points de la droite $\omega = \alpha$ feraient partie de la courbe, ce que nous ne supposons pas.

Il reste donc seulement l'identité

$$(A) \qquad f(\rho, \alpha + \omega) \equiv f(\rho, \alpha - \omega).$$

De même, pour un rayon principal β de deuxième espèce, il vient

$$f(\rho, \beta + \omega) \equiv \eta f(\rho, \beta - \omega).$$

Changeons ρ et ω en $-\rho$ et $-\omega$,

$$f(-\rho, \beta - \omega) \equiv \eta f(\rho, \beta + \omega).$$

On aura donc

$$\eta = \pm 1.$$

Mais ici il faut généralement conserver les deux signes.

Remarque. — Toutefois si *f considérée comme fonction de ρ seulement* est, soit une fonction paire, soit une fonction impaire, on prendra soit $\eta = 1$ ou $\eta = -1$. Nous pouvons toujours écarter ce dernier cas en divisant le premier membre de l'équation par une puissance impaire de ρ convenablement choisie.

Nous aurons donc ici

$$(B)\quad f(\rho, \beta + \omega) = \eta f(-\rho, \beta - \omega) \qquad \text{avec} \qquad \eta = \pm 1.$$

Donnons maintenant la démonstration analytique du théorème I; nous en déduirons une formule importante.

Soient deux rayons principaux θ et θ' faisant entre eux l'angle φ. Deux rayons R, R_1, symétriques par rapport à θ, donnent

$$(1)\quad f(\rho, \theta + \omega) = \eta f(\varepsilon\rho, \theta - \omega) \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

suivant que θ est de première ou de deuxième espèce.

Prenons leurs symétriques relativement à $\theta'(\varepsilon' = \pm 1)$,

$$(2)\quad \begin{cases} f(\rho, \theta + \omega) = \eta' f(\varepsilon'\rho, \theta + 2\varphi - \omega), \\ f(\rho, \theta - \omega) = \eta' f(\varepsilon'\rho, \theta + 2\varphi + \omega). \end{cases}$$

Ces relations, ayant lieu quel que soit ρ, subsistent si l'on change ρ en $\varepsilon\rho$ simultanément dans les deux membres.

La deuxième peut donc s'écrire

$$f(\varepsilon\rho, \theta - \omega) = \eta' f(\varepsilon\varepsilon'\rho, \theta + 2\varphi + \omega).$$

Reportons dans l'équation (1),

$$(3)\quad f(\varepsilon'\rho, \theta + 2\varphi - \omega) = \eta f(\varepsilon\varepsilon'\rho, \theta + 2\varphi + \omega).$$

On peut encore supprimer, de part et d'autre, le facteur ε',

$$f(\rho, \theta + 2\varphi - \omega) = \eta f(\varepsilon\rho, \theta + 2\varphi + \omega);$$

$\theta + 2\varphi$ est donc bien un rayon principal de même espèce que θ et *avec le même facteur* η.

Corollaire. — Dans l'équation (2), remplaçons le deuxième membre par la valeur (3), on a

$$f(\rho, \theta + \omega) = \eta\eta' f(\varepsilon\varepsilon'\rho, \theta + \omega + 2\varphi)$$

ou, en remplaçant par ω l'angle $\theta + \omega$ qui est quelconque,

$$(\mathrm{C}) \qquad f(\rho, \omega) \equiv \eta\eta_1^s f(\varepsilon\varepsilon'\rho, 2\varphi + \omega),$$

formule fondamentale.

Nous distinguerons encore deux cas, comme dans la première Partie.

Premier cas. — *La courbe est obtenue tout entière en faisant varier ω d'un angle $2\mu\pi$.*

§ I. — *Équation générale des courbes possédant m axes de première espèce.*

J'observe d'abord que m doit être premier avec μ, à moins que l'un de ces deux nombres ne soit égal à l'unité, si, comme nous le supposons toujours, $2\mu\pi$ est l'intervalle le plus réduit possible donnant toute la courbe.

En effet, l'angle de deux rayons principaux consécutifs est

$$\varphi = \frac{\mu\pi}{m}.$$

Supposons pour un instant que m et μ aient un plus grand commun diviseur $d > 1$, de façon que $\begin{cases} m = m_1 d, \\ \mu = \mu_1 d, \end{cases}$ il vient

$$\varphi = \frac{\mu_1}{m_1}\pi.$$

Appliquons m_1 fois de suite la formule (C)

$$f[(\varepsilon\varepsilon')^{m_1}\rho, \omega + 2m_1\varphi] \equiv (\eta\eta_1')^{m_1} f(\rho, \omega).$$

Mais $2m_1\varphi = 2\mu_1\pi$ et les axes étant de même espèce $\varepsilon\varepsilon' = 1$,

$$f(\rho, \omega + 2\mu_1\pi) \equiv (\eta\eta_1')^{m_1} f(\rho, \omega),$$

la courbe se reproduirait après un intervalle $2\mu_1\pi$: donc $2\mu\pi$ ne serait pas le plus réduit possible.

Cette démonstration s'appliquerait aussi, on le voit, à des axes de deuxième espèce.

Ceci posé, j'imagine une courbe ayant m axes de première espèce qui passent par le pôle, et je prends l'un d'eux comme axe polaire afin de simplifier. Le rayon principal suivant fait avec lui l'angle $\frac{\mu\pi}{m}$. On devra donc avoir les deux relations

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} f(\rho, -\omega) \equiv f(\rho, \omega), \\ f\left(\rho, \frac{\mu\pi}{m} - \omega\right) \equiv f\left(\rho, \frac{\mu\pi}{m} - \omega\right). \end{array}\right.$$

D'ailleurs, si ces conditions sont remplies, la courbe possédant deux rayons principaux distants de $\frac{\mu\pi}{m}$, on a m dans l'intervalle $\mu\pi$. Cela résulte du théorème I et de ce que la fraction $\frac{\mu}{m}$ est irréductible.

Or il est facile de vérifier que les deux fonctions particulières

$$\left\{\begin{array}{l} u = \rho, \\ v = \cos\frac{m\omega}{\mu} \end{array}\right.$$

satisfont chacune aux conditions (4) : il en sera donc de même de toute fonction $F(u, v)$ *uniforme* en u et v, et l'équation $F(u, v) = 0$ représente une courbe possédant les m axes de symétrie. Je dis, de plus, que pour l'obtenir tout entière il est nécessaire et suffisant de faire varier ω de $2\mu\pi$.

En effet, m et μ étant premiers entre eux, la plus petite période de $v = \cos\frac{m\omega}{\mu}$ qui soit en même temps multiple entier de π est $2\mu\pi$ si m est impair. C'est $\mu\pi$ si m est pair, mais alors, μ étant impair, il faudrait changer ρ en $-\rho$ avec ω en $\mu\pi + \omega$ et la fonction u changerait : donc on ira encore jusqu'à $2\mu\pi$.

Inversement, je dis que l'équation $F(u, v) = 0$, dans laquelle F est uniforme en u et v, est l'équation générale des courbes ayant m axes de première espèce et obtenues par une variation minima de $2\mu\pi$.

Soit $f(\rho, \omega) = 0$ l'équation d'une pareille courbe, il suffit de montrer que, si l'on exprime ρ et ω en u et v, f devient une fonction uniforme de u et v

$$f(\rho, \omega) = F(u, v).$$

Supposons effectuée la transformation, et soit (u, v) un système de valeurs u et v, on a

$$\rho = u, \qquad \cos\frac{m\omega}{\mu} = v.$$

Posons

$$v = \cos\frac{m\alpha}{\mu},$$

il vient

$$\omega = \frac{2k\mu\pi}{\mu} \pm \alpha.$$

On a ainsi $2m$ valeurs pour ω.

Ainsi, au système (u, v) correspondent $2m$ points du plan. Je dis qu'en ces $2m$ points la fonction $f(\rho, \omega) = F(u, v)$ reprend la même valeur.

Appliquons pour cela k fois la formule (C), il faut y faire

$$\eta = \varepsilon = \varepsilon' = 1, \qquad f(\rho, \omega) \equiv f(\rho, 2k\varphi + \omega).$$

Mais $\varphi = \frac{\mu\pi}{m}$, donc, pour la première série de m points $\omega = \frac{2k\mu\pi}{m} + \alpha$, on a

$$f\left(\rho, \frac{2k\mu\pi}{m} + \alpha\right) \equiv f(\rho, \alpha).$$

Pour la deuxième série de m points

$$f\left(\rho, \frac{2k\mu\pi}{m} - \alpha\right) \equiv f(\rho, -\alpha),$$

et, d'après la première formule (4),

$$= f(\rho, \alpha).$$

Ainsi, pour un système (u, v), $F(u, v)$ n'a qu'une seule valeur $f(\rho, \alpha)$: c'est donc bien une fonction uniforme en u et v ([1]).

§ II. — *Équation générale des courbes ayant m axes de deuxième espèce.*

m et μ doivent encore être premiers entre eux à moins que l'un d'eux ne soit égal à 1. De plus, j'observe que le facteur η de la formule (B) n'est pas altéré par une rotation de l'axe polaire, car cette formule exprime simplement que les valeurs de ρ qui correspondent à deux rayons donnés sont égales et de signes contraires, résultat indépendant de l'origine des angles polaires.

On doit avoir, comme tout à l'heure,

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & f(\rho, \omega) \equiv \eta f(-\rho, -\omega), \\ & f\left(\rho, \frac{\mu\pi}{m} + \omega\right) \equiv \eta' f\left(-\rho, \frac{\mu\pi}{m} - \omega\right), \end{aligned} \right.$$

et, en vertu de la remarque qu'on vient de faire, on peut se borner aux trois cas que voici :

$$1^\circ \left\{ \begin{aligned} \eta &= 1, \\ \eta' &= 1; \end{aligned} \right. \qquad 2^\circ \left\{ \begin{aligned} \eta &= -1, \\ \eta' &= -1; \end{aligned} \right. \qquad 3^\circ \left\{ \begin{aligned} \eta &= -1, \\ \eta' &= 1. \end{aligned} \right.$$

1° $\eta = \eta' = 1$. — Ici nous poserons

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \rho \sin \frac{m\omega}{\mu}, \\ v &= \cos \frac{m\omega}{\mu}. \end{aligned} \right.$$

([1]) Nous avons suivi pour cette démonstration un mode de raisonnement analogue à celui adopté par M. Éd. Goursat dans son Mémoire « Sur les surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier ».

Ces deux fonctions satisfont aux conditions (ρ) pour $\eta_1 = \eta_1' = 1$.

Et l'on montrerait encore que l'équation *générale* des courbes ayant les propriétés énoncées est

$$F(u, v) = 0,$$

F étant une fonction quelconque uniforme en u et v.

2° $\eta_1 = \eta_1' = -1$. — Prenons les deux fonctions

$$\begin{cases} u = \rho, \\ v = \operatorname{tang} \dfrac{m\omega}{2\mu}, \end{cases}$$

qui satisfont aux conditions (5) pour $\eta_1 = \eta_1' = -1$. Si $F(u, v)$ désigne une fonction uniforme quelconque, mais *impaire* en u et v, c'est-à-dire satisfaisant à l'identité $F(-u, -v) \equiv -F(u, v)$, l'équation $F(u, v) = 0$ représente une courbe ayant les propriétés énoncées.

Réciproquement, je dis qu'on a là l'équation générale de ces courbes.

Soit, en effet, $f(\rho, \omega) = 0$ l'une de ces courbes. Exprimons ρ et ω en u et v, il vient

$$\rho = u, \qquad \operatorname{tang} \frac{m\omega}{2\mu} = v.$$

Je pose

$$v = \operatorname{tang} \frac{m\alpha}{2\mu},$$

d'où

$$\frac{m\omega}{2\mu} = k\pi + \frac{m\alpha}{2\mu}, \qquad \omega = \frac{2k\mu\pi}{m} + \alpha,$$

ce qui donne m points du plan correspondant à un couple de valeurs (u, v). Je dis qu'en ces m points $f(\rho, \omega)$ ou $F(u, v)$ reprend la même valeur.

Ici la formule (C) est

$$f(\rho, \omega + 2\varphi) \equiv f(\rho, \omega), \qquad \varphi = \frac{\mu\pi}{m};$$

appliquons-la k fois

$$f\left(\rho, \frac{2k\mu\pi}{m}+\alpha\right) \equiv f(\rho\alpha);$$

$F(u, v)$ reprend bien la même valeur, elle est uniforme.

J'ajoute qu'elle est *impaire* en u et v. Pour cela, je considère le couple $\begin{cases} u' = -u, \\ v' = -v. \end{cases}$ Les valeurs correspondantes du rayon vecteur et de l'angle polaire $\rho'\omega'$, sont

$$\rho' = -\rho, \qquad v' = -v = \operatorname{tang}\left(-\frac{m\alpha}{2\mu}\right),$$

d'où

$$\frac{m\omega'}{2\mu} = k\pi - \frac{m\alpha}{2\mu}, \qquad \omega' = \frac{2k\mu\pi}{m} - \alpha.$$

Mais, d'après ce qui précède,

$$f\left(\rho', \frac{2k\mu\pi}{m} - \alpha\right) = f(\rho', -\alpha) = f(-\rho, -\alpha).$$

Or f satisfait par hypothèse aux conditions (5) et la première donne ici

$$f(-\rho, -\alpha) \equiv -f(\rho, \alpha).$$

Ainsi

$$F(-u, -v) \equiv -F(u, v), \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque I. — La deuxième série de m points forme avec la première un ensemble de $2m$ points ayant la symétrie de deuxième espèce par rapport aux m axes donnés.

Remarque II. — Si m est pair ($m = 2m'$) la fonction $\operatorname{tang}\frac{m\omega}{2\mu}$ se réduit à $\operatorname{tang}\frac{m'\omega}{\mu}$, mais le raisonnement précédent est toujours vrai.

3° $\eta_1 = -1$, $\eta_1' = 1$. — On prend

$$\left\{\begin{aligned} u &= \sin\frac{m\omega}{2\mu},\\ v &= \rho\cos\frac{m\omega}{2\mu}\end{aligned}\right.$$

et une fonction quelconque $F(u, v)$, mais *uniforme* et *impaire,* en u et v.

Réciproquement, $F(u, v) = 0$ est alors l'équation générale cherchée.

§ III. — *Équation générale des courbes possédant m axes de l'une et l'autre espèce.*

On a vu (première Partie) que $m = 2m'$ et qu'il y a m' axes de chaque espèce.

On montrerait, à l'aide du raisonnement déjà suivi, que m' est premier avec μ, à moins que l'un d'eux ne soit égal à l'unité.

1° *Je suppose les rayons principaux simples.* — On ne peut alors avoir à la fois μ et m' impairs.

En effet, la formule (C) est alors

$$f(\rho, \omega) \equiv \eta_1 f(-\rho, \omega + 2\varphi).$$

On a

$$\varphi = \frac{\mu\pi}{m}, \qquad 2\varphi = \frac{\mu\pi}{m'}.$$

Appliquons m' fois cette formule

$$f(\rho, \omega) \equiv \eta_1^{m'} f[(-\rho)^{m'}\omega + \mu\pi],$$

ou, puisque m' est supposé impair,

$$f(\rho, \omega) \equiv \eta_1 f(-\rho, \omega + \mu\pi).$$

Ainsi l'équation ne changerait pas si l'on changeait ω en $\mu\pi + \omega$ et ρ en $-\rho$, et comme μ est impair, on aurait toute la courbe en faisant varier ω de o à $\mu\pi$: on serait donc ramené au deuxième cas.

Donc si μ est impair m' est pair. D'ailleurs, si μ est pair, m' est impair puisqu'il est premier avec μ.

Ceci posé, nous avons deux hypothèses à examiner suivant que le facteur η de f relatif à un rayon de deuxième espèce est égal à ± 1.

(a) $\eta = 1$. — Prenons comme axe polaire un rayon de première espèce, il faut que $f(\rho, \omega)$ satisfasse aux deux relations

$$(6)\qquad \begin{cases} f(\rho, \omega) \equiv f(+\rho, -\omega), \\ f\left(\rho, \dfrac{\mu\pi}{m} + \omega\right) \equiv f\left(-\rho, \dfrac{\mu\pi}{m} - \omega\right). \end{cases}$$

Posons

$$\begin{cases} u = \rho^2, \\ v = \rho \cos \dfrac{m'\omega}{\mu}, \end{cases}$$

l'équation générale des courbes dont il s'agit sera

$$F(u, v) = 0,$$

$F(u, v)$ étant une fonction *uniforme* quelconque.

(b) $\eta = -1$. — Prenons comme axe polaire le rayon de deuxième espèce. Ici f doit satisfaire aux conditions

$$(7)\qquad \begin{cases} f(\rho, \omega) \equiv -f(-\rho, -\omega), \\ f\left(\rho, \dfrac{\mu\pi}{m} + \omega\right) \equiv f\left(\rho, \dfrac{\mu\pi}{m} - \omega\right). \end{cases}$$

On a d'abord les fonctions

$$\begin{cases} u = \rho, \\ v = \sin \dfrac{m'\omega}{\mu}, \end{cases}$$

puis toute fonction *uniforme* et *impaire* en u et v, $F(u, v)$.

2° *Tous les rayons principaux sont doubles.* — Nous avons annoncé dans la première Partie que le nombre m' de ces rayons était *impair*.

Supposons, en effet, qu'il soit pair, $m' = 2m''$, μ serait impair. La formule (C) est alors

$$f(\pm\rho, \omega + 2\varphi) \equiv f(\rho, \omega),$$

appliquons-la m'' fois :

$$f(\pm\rho. \omega + 2m''\varphi) \equiv f(\rho, \omega),$$

mais

$$\varphi = \frac{\mu\pi}{m'}, \qquad 2m''\varphi = \mu\pi \qquad \text{et} \qquad f(\pm\rho, \omega + \mu\pi) \equiv f(\rho, \omega);$$

la courbe se reproduirait au bout de l'intervalle $\mu\pi$, et comme μ est impair, on serait ramené au deuxième cas.

Prenons l'un de ces rayons comme axe polaire; il faut que $f(\rho, \omega)$ satisfasse aux conditions

$$(8) \qquad \begin{cases} f(\rho, \omega) \equiv \eta f(\pm\rho, -\omega), \\ f\left(\rho, \dfrac{\mu\pi}{m'} + \omega\right) \equiv \eta' f\left(\pm\rho, \dfrac{\mu\pi}{m'} - \omega\right). \end{cases}$$

Ces formules montrent que $f(\rho, \omega)$ est d'une parité déterminée par rapport à ρ. On peut toujours la supposer paire, sans quoi on diviserait par une puissance impaire de ρ convenablement choisie; on a alors $\eta = \eta' = 1$, ainsi qu'il résulte d'une remarque faite au commencement de la deuxième Partie.

Nous prendrons alors

$$\begin{cases} u = \rho^2, \\ v = \cos\dfrac{m'\omega}{\mu}, \end{cases}$$

et pour $F(u, v)$ une fonction *uniforme* quelconque.

Deuxième cas. — *La courbe est obtenue tout entière en faisant varier* ω *de* $(2\mu + 1)\pi$.

Il y a alors m' axes de chaque espèce.

Je dis que, si aucun des nombres m' et $2\mu+1$ n'est égal à 1, ces nombres sont premiers entre eux.

Supposons, en effet, qu'ils aient un plus grand commun diviseur $d > 1$,

$$\begin{cases} m' = m_1 d, \\ 2\mu+1 = \mu_1 d. \end{cases}$$

Soit d'abord m' pair, alors $\varphi = \frac{(2\mu+1)\pi}{m'} = \frac{\mu_1\pi}{m_1}$ (*voir* la première Partie). Appliquons m_1 fois la formule (C),

$$f[(-1)^{m_1}\rho, \omega + 2m_1\varphi] \equiv (\eta\eta')^{m_1} f(\rho, \omega).$$

Mais d est impair comme $2\mu+1$: donc m' étant pair, m_1 l'est aussi; on aurait

$$f(\rho, \omega + 2\mu_1\pi) \equiv f(\rho, \omega),$$

et toute la courbe serait obtenue en faisant varier ω de $2\mu_1\pi$. Mais d qui est impair est au moins égal à 3. $2\mu_1 < \mu_1 d < 2\mu+1$, l'intervalle $(2\mu+1)\pi$ ne serait pas le plus réduit.

Si m' était impair, on appliquerait $2m_1$ fois la formule (C). Puisqu'il y a des axes de chaque espèce, nous aurons les mêmes subdivisions qu'au § III du premier cas.

1° *Je suppose les rayons principaux simples* —Alors m' est impair.

Nous avons deux hypothèses à examiner suivant que le facteur η de f relatif à un rayon principal de deuxième espèce est égal à ± 1.

(a) $\eta = 1$. — Prenons comme axe polaire un rayon de première espèce, le rayon $\frac{(2\mu+1)\pi}{m}$ sera de deuxième espèce.

Il faut que $f(\rho, \omega)$ satisfasse aux conditions analogues aux équations (6) :

$$\left\{\begin{array}{l} f(\rho, \omega) = f(\rho, -\omega), \\ f\left[\rho, \dfrac{(2\mu+1)\pi}{m} + \omega\right] \equiv f\left[-\rho, \dfrac{(2\mu+1)\pi}{m} - \omega\right]. \end{array}\right.$$

Or les deux fonctions

$$\left\{\begin{array}{l} u = \rho^2, \\ v = \rho \cos \dfrac{m'\omega}{2\mu+1} \end{array}\right.$$

y satisfont et il en est de même d'une fonction uniforme quelconque $F(u, v)$.

De plus, si l'on change ρ en $-\rho$ et qu'on augmente ω de $(2\mu+1)\pi$, u et v ne changent pas puisque m' est impair. Donc la courbe $F(u, v) = 0$ est décrite tout entière et une seule fois, puisque m' est premier avec $2\mu+1$. D'ailleurs, $F(u, v) = 0$ est bien l'équation générale.

(b) $\eta = -1$. — Prenons ici comme axe polaire un rayon de deuxième espèce. On a les équations de condition

$$\left\{\begin{array}{l} f(\rho, \omega) \equiv -f(-\rho, -\omega), \\ f\left[\rho, \dfrac{(2\mu-1)\pi}{m} + \omega\right] \equiv f\left[\rho, \dfrac{(2\mu+1)\pi}{m} - \omega\right]. \end{array}\right.$$

Les fonctions particulières

$$\left\{\begin{array}{l} u = \rho, \\ v = \sin \dfrac{m'\omega}{2\mu+1} \end{array}\right.$$

y satisfont ainsi qu'une fonction $F(u, v)$ *uniforme* et *impaire* en u et v. D'ailleurs $F(u, v) = 0$ sera l'équation générale des courbes ayant la symétrie en question.

2° *Les rayons principaux sont doubles.* — Alors m' est pair, O est centre de troisième espèce (première Partie). $f(\rho, \omega)$ est une fonction paire en ρ. Elle doit satisfaire aux équations analogues à (8),

$$\begin{cases} f(\rho, \omega) = f(\pm \rho, -\omega), \\ f\left[\rho, \dfrac{(2\mu+1)\pi}{m'} + \omega\right] = f\left[\pm \rho, \dfrac{(2\mu+1)\pi}{m'} - \omega\right]. \end{cases}$$

On prendra comme fonctions particulières

$$\begin{cases} u = \rho^2, \\ v = \cos \dfrac{m'\omega}{2\mu+1}, \end{cases}$$

et en général une fonction *uniforme* quelconque $F(u, v)$.

Disposition des axes de symétrie. — On peut maintenant établir le résultat suivant :

Dans le premier cas, les axes de symétrie sont simples, dans le deuxième cas ils sont doubles.

D'abord, pour le premier cas, il suffit évidemment de se borner au § III, le seul où il y ait des axes de chaque espèce.

Si un axe était en même temps des deux espèces, il devrait correspondre à la fois à deux rayons principaux de la forme θ et $\theta + (2h+1)\frac{\pi}{2}$ et d'espèce différente, ce qui exigerait, en supposant simples tous les rayons principaux, que $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ fût de la forme $(2h+1)\varphi$ et comme $\varphi = \frac{\mu\pi}{m}$,

$$(2k+1)m' = (2h+1)\mu.$$

D'après cela, μ et m' devraient être tous deux pairs ou tous deux impairs, ce qui est impossible ici.

Si l'on supposait doubles tous les rayons principaux, $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ serait de la forme $h\varphi$, mais $\varphi = \frac{\mu\pi}{m'}$, il viendrait $(2k+1)m' = 2h\mu$, ce qui est encore impossible, m' étant impair.

Dans le deuxième cas, les deux mêmes relations sont, au contraire, toujours possibles d'après la forme de φ.

Résumons maintenant dans un Tableau les divers résultats de cette première Section.

		Premier cas. ω varie de 0 à $2\mu\pi$.	Deuxième cas. ω varie de 0 à $(2\mu+1)\pi$.
m axes de première espèce....		$F\left(\rho, \cos\frac{m\omega}{\mu}\right) = 0$	
m axes de deuxième espèce	$\eta_1 = \eta_1' = 1$......	$F\left(\rho, \sin\frac{m\omega}{\mu}, \cos\frac{m\omega}{\mu}\right) = 0$	
	$\eta = \eta_1' = -1$....	$F\left(\rho, \operatorname{tang}\frac{m\omega}{\mu}\right) = 0$ (F impaire)	
	$\eta_1 = -1,\ \eta_1' = 1$..	$F\left(\sin\frac{m\omega}{2\mu}, \rho\cos\frac{m\omega}{2\mu}\right) = 0$ (F impaire)	
m' axes de chaque espèce	Rayons principaux *simples*: $\eta = 1$...	$F\left(\rho^2, \rho\cos\frac{m'\omega}{\mu}\right) = 0$	$F\left(\rho^2, \rho\cos\frac{m'\omega}{2\mu+1}\right) = 0$
	Rayons principaux *simples*: $\eta = -1$.	$F\left(\rho, \sin\frac{m'\omega}{\mu}\right) = 0$ (F impaire)	$F\left(\rho, \sin\frac{m'\omega}{2\mu+1}\right) = 0$ (F impaire)
	Rayons principaux *doubles*	$F\left(\rho^2, \cos\frac{m'\omega}{\mu}\right) = 0$	$F\left(\rho^2, \cos\frac{m'\omega}{2\mu+1}\right) = 0$

Section II. — Centre de symétrie.

Si le pôle est centre de symétrie de première ou de deuxième espèce, c'est que ω varie de o à $2\mu\pi$.

Dans la première hypothèse, μ doit être impair, et, d'après la première Partie, $f(\rho, \omega)$ devra satisfaire à l'identité

$$f(\rho, \omega) \equiv k f(\rho, \omega + \mu\pi),$$

le facteur k peut être soit une constante, soit une fonction de ρ et ω.

L'équation générale sera

$$F\left(\rho, \operatorname{tang}\frac{\omega}{\mu}\right) = 0 \quad (F \text{ uniforme}).$$

Pour un centre de deuxième espèce, on a l'identité

$$f(\rho, \omega) \equiv k f(-\rho, \mu\pi + \omega),$$

et μ pair.

L'équation générale sera

$$F\left(\rho^2, \rho\cos\frac{\omega}{\mu}\right) = 0 \quad (F \text{ uniforme}).$$

Enfin le pôle peut être centre de troisième espèce, il faut pour cela que $f(\rho, \omega)$ soit d'une parité déterminée par rapport à la seule variable ρ.

Section III. — Centre et axes.

On peut enfin comparer la Section I à la première Partie; on est ainsi conduit aux résultats suivants :

Premier cas : ω *varie de* o *à* $2\mu\pi$ (§ I et II). — Les axes étant d'une seule espèce, le pôle ne peut être centre que de première espèce. Pour cela, il faut et il suffit que μ soit impair et m pair.

(§ III). Je dis que *le pôle est toujours un centre de l'une des trois espèces.*

Supposons les rayons principaux *simples.*

Si μ est *impair*, m' est pair, le rayon $\theta + m'\varphi$ est de même espèce que θ, mais $\theta + m'\varphi = \theta + \frac{\mu\pi}{2}$: il est donc perpendiculaire à θ et le pôle est centre de première espèce.

Si μ est *pair*, m' est impair, $\theta + m'\varphi$ est donc d'espèce différente de θ, mais $\theta + \frac{\mu\pi}{2}$ s'applique sur la même direction que θ, les deux axes sont rectangulaires et le pôle est un centre de deuxième espèce.

Enfin, si les rayons principaux sont *doubles,* le pôle est centre de troisième espèce.

Deuxième cas : ω *varie de* o *à* $(2\mu + 1)\pi$. — O ne peut être centre que de troisième espèce; il le sera, si les rayons principaux sont doubles, ce qui exige m' pair. D'ailleurs cela suffit.

Section IV. — Équation cartésienne des courbes ayant M axes de symétrie passant par l'origine.

Nous allons montrer que si l'on transforme en coordonnées cartésiennes les différentes équations obtenues précédemment en coordonnées polaires, on obtient une forme unique.

Observons néanmoins que cette transformation pouvant compliquer sigulièrement l'équation de la courbe, il y avait intérêt à étudier la symétrie sur les formes données.

Comme la distinction des axes de symétrie en deux espèces n'a pas lieu d'être faite en coordonnées cartésiennes, M sera simplement le nombre des axes différents au point de vue graphique. Je dis que, dans tous les cas de l'étude précédente, la courbe se superpose à elle-même si on la fait tourner de $\frac{2\pi}{M}$ autour du pôle [1].

Premier cas. — Alors tous les axes de symétrie sont simples, donc $M = m$. Examinons les divers paragraphes.

(§ I et II). D'abord la courbe se superpose à elle-même si on la fait tourner de 2φ. La formule (C) est, en effet,

$$f(\rho, \omega + 2\varphi) \equiv \eta\eta' f(\rho, \omega).$$

Le point M vient en M′ (*fig.* 3). Il suffit donc de montrer qu'une rotation égale à un certain multiple de 2φ est égale à $\frac{2\pi}{M}$, augmenté, s'il le faut, d'un certain nombre de circonférences, ou

$$k.2\varphi = 2h\pi + \frac{2\pi}{m} \qquad \text{ici} \qquad \varphi = \frac{\mu\pi}{m},$$

$$k\mu - hm = 1,$$

m et μ étant premiers entre eux; cette équation peut être résolue par des valeurs entières de h et de k.

(§ III). Le pôle est toujours centre, la formule (C) devient

$$f(-\rho, \omega + 2\varphi) \equiv \eta f(\rho, \omega);$$

elle est relative aux points M et M″ (*fig.* 3). Mais, comme le pôle est centre, le symétrique M′ de M est encore sur la courbe et la courbe se superpose par une rotation égale à 2φ. Une rotation égale à π produirait le même résultat puisque O est centre. On doit donc avoir

$$k.2\varphi = h\pi + \frac{2\pi}{m};$$

[1] Cette propriété pourrait être posée *a priori* d'après la symétrie au point de vue géométrique pur.

1° Les rayons principaux sont simples, $\varphi = \frac{\mu\pi}{m'}$, $m = 2m'$, $k\mu - hm' = 1$, relation possible;

2° Les rayons principaux sont doubles, $\varphi = \frac{\mu\pi}{m'}$, $k.2\mu - hm' = 1$, relation encore possible, m' étant impair.

Deuxième cas. — Alors les axes de symétrie sont doubles, leur nombre est donc $M = m'$. Je dis qu'il faut encore faire tourner la courbe de $\frac{2\pi}{M} = \frac{2\pi}{m'}$ pour qu'elle se superpose à elle-même :

1° Je suppose simples tous les rayons principaux; alors m' impair, O n'est pas centre, la formule (C) est

$$f(-\rho.\omega + 2\varphi) = \eta_1 f(\rho.\omega).$$

Appliquons-la deux fois, la courbe se superpose par une rotation de 4φ. Il faut donc établir la relation

$$k.4\varphi = 2h\pi + \frac{2\pi}{m'};$$

or

$$\varphi = \frac{(2\mu+1)\pi}{2m'},$$

donc

$$k(2\mu+1) - hm' = 1,$$

relation possible en h et k;

2° Je suppose que tous les rayons principaux soient doubles; alors m' est pair, O est centre de troisième espèce, les rotations 2φ ou π superposent la courbe à elle-même, il faut donc établir que

$$k.2\varphi = h\pi + \frac{2\pi}{m'};$$

or

$$\varphi = \frac{(2\mu+1)\pi}{m'},$$

mais

$$m' = 2m''. \qquad k(2\mu + 1) - hm'' = 1,$$

relation possible.

Ceci posé, soit $\Phi(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe ayant les M axes de symétrie, l'un de ces axes étant pris comme axe des u et oy perpendiculaire à ox.

Appliquons les formules

$$\begin{cases} x = \rho \cos\omega, \\ y = \rho \sin\omega, \end{cases}$$

et soit $f(\rho, \omega) = 0$ l'équation ainsi obtenue. D'après ce qu'on vient de dire des axes, cette fonction $f(\rho, \omega)$ doit satisfaire aux deux conditions

$$(1) \qquad \begin{cases} f(\rho, -\omega) = f(\rho, \omega), \\ f\left(\rho, \omega + \dfrac{2\pi}{M}\right) = f(\rho, \omega), \end{cases}$$

et cela suffit.

Or les deux fonctions particulières

$$\begin{cases} u = \rho^2, \\ v = \rho^M \cos M\omega, \end{cases}$$

y satisfont et il en sera de même de toute fonction uniforme $F(u, v)$. En reprenant encore le procédé employé au cours de cette étude, on montrerait que $F(u, v) = 0$, dans laquelle $F(u, v)$ est uniforme en u et v est l'équation générale des courbes satisfaisant aux équations (1), c'est-à-dire ayant M axes de symétrie.

Or on a inversement

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

et la formule de Moivre donne immédiatement

$$\rho^M \cos M\omega = x^M - \frac{M(M-1)}{1.2} x^{M-2} y^2 + \ldots.$$

L'équation cartésienne cherchée est donc enfin

$$F\left[x^2+y^2,\ x^{M}-\frac{M(M-1)}{1.2}x^{M-2}y^2 + \frac{M(M-1)(M-2)(M-3)}{1.2.3.4}x^{M-4}y^4-\ldots\right]=0 \quad (^1).$$