NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LOUIS RAVIER

Sur un théorème analogue à celui de Carnot ou généralisation du théorème de Jean de Céva

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 349-352

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__349_1>

SUR UN THÉORÈME ANALOGUE A CELUI DE CARNOT OU GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE JEAN DE CEVA;

PAR M. LOUIS RAVIER.

On se sert dans ce qui suit de coordonnées rectangulaires.

Soit $f(u, v, w) = 0$ l'équation tangentielle d'une courbe de classe m.

La condition pour que la droite joignant les points

$$\begin{array}{llll} x, & y, & z & (z = 1) \\ x_1, & y_1, & z_1 & (z_1 = 1) \end{array}$$

soit tangente à cette courbe est

$$f(y_1 z - y z_1,\ z_1 x - z x_1,\ x_1 y - x y_1) = 0.$$

Si x_1, y_1, z_1 sont fixes et x, y, z variables, l'équation (1) représente le faisceau des tangentes issues du point x_1, y_1, z_1 à la courbe $f(u, v, w) = 0$.

Le produit des distances du point x_2, y_2, z_2 ($z_2 = 1$) aux différents points de rencontre des droites représentées par l'équation (1) avec la droite passant par x_2, y_2, z_2 et ayant pour paramètres de direction α, β, γ ($\alpha^2 + \beta^2 = 1$) est

$$(-1)^m \frac{f(y_1 z_2 - y_2 z_1,\ z_1 x_2 - z_2 x_1\ x_1 y_2 - x_2 y_1)}{f(y_1\gamma - \beta z_1,\ z_1\alpha - \gamma x_1,\ x_1\beta - \alpha y_1)}.$$

Nous désignerons

$$f(y_1 z_2 - y_2 z_1,\ z_1 x_2 - z_2 x_1,\ x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

par

$$f(1 = 2)$$

et [en supposant la droite $x_2 y_2 z_2$, $\alpha\beta\gamma$ déterminée par le point x_2, y_2, z_2 et par un autre point $x_3 y_3 z_3$ ($z_3 = 1$)

$$f(y_1\gamma - \beta z_1,\ z_1\alpha - \gamma x_1,\ x_1\beta - \alpha y_1)$$

par

$$f(1, 2 = 3).$$

Cela posé, on remarque immédiatement que

$$f(1 = 2) = (-1)^m f(2 = 1)$$

et que

$$f(1, 2 = 3) = f(1, 3 = 2).$$

Des considérations qui suivent on déduit le théorème suivant analogue à celui de Carnot, et qui peut être regardé encore comme une généralisation du théorème de Jean de Céva.

Si de chacun des sommets d'un polygone quelconque on mène toutes les tangentes possibles à une courbe algébrique, et si l'on prend leurs points de rencontre avec les côtés du polygone ne passant pas par ce sommet, si l'on forme ensuite le produit en grandeur et *en signe des distances des points d'intersection sur le premier côté au premier sommet, puis de ceux sur le second au second sommet, et ainsi de suite; si l'on recommence ensuite en sens inverse, on obtient deux produits toujours égaux en valeur absolue, et qui sont de signes contraires si le nombre des côtés du polygone et la classe de la courbe sont tous deux des nombres impairs.*

Soient $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2, \ldots, x_n y_n z_n$ les sommets d'un polygone.

Le premier produit est

$$(-1)^m \frac{f(1=2)}{f(1,2=3)} \times (-1)^m \frac{f(1=3)}{f(1,3=4)} \times \ldots \times (-1)^m \frac{f[1=(n-1)]}{f[1,(n-1)=n]}$$

$$(-1)^m \frac{f(2=3)}{f(2,3=4)} \times \ldots \times (-1)^m \frac{f(2=n)}{f(2,n=1)}$$

. . . .

$$(-1)^m \frac{f(n=1)}{f(n,1=2)} \times \ldots \times (-1)^m \frac{f[n=(n-2)]}{f[n,(n-2)=(n-1)]}$$

Le second n'en diffère qu'en ce que $f(p=q)$ y entre sous la forme $f(q=p)$, et $f(p,q=r)$ sous la forme $f(p,r=q)$. Comme $f(p=q)=(-1)^m f(q=p)$ et que $f(p,q=r)=f(p,r=q)$, le second produit sera égal au premier multiplié par

$$(-1)^{m \times \text{le nombre des facteurs de l'un des produits}}$$

ou si l'on désigne par p le nombre des sommets du polygone $(-1)^{mp(p-2)}$, ce qui confirme l'énoncé donné plus haut.

Applications. — Ce théorème peut en particulier servir à démontrer cette propriété bien connue que :

Les tangentes aux trois points de rebroussement d'une courbe de troisième classe concourent en un même point.

Prenons pour polygone le triangle ayant pour sommets les points de rebroussement.

Soient $11'$, $22'$, $33'$ les tangentes en ces points ; ce sont des tangentes triples, et en appliquant le théorème on trouve

$$\overline{21'}^3 \times \overline{32'}^3 \times \overline{13'}^3 = -\overline{31'}^3 \times \overline{23'}^3 \times \overline{12'}^3$$

ou

$$21' \times 32' \times 13' = -31' \times 23' \times 12'$$

ce qui prouve (réciproque du théorème de Céva) que les droites $11'$, $22'$, $33'$ sont concourantes. C. Q. F. D.

On démontrera de la même manière que :

Quand une conique est circonscrite à un triangle, les points de rencontre des tangentes aux trois sommets avec les côtés opposés sont en ligne droite (on s'appuiera sur la réciproque du théorème de Ménélaüs).

Enfin on peut en déduire, en s'appuyant sur la réciproque du théorème de Carnot appliqué au cas d'une conique et d'un triangle que

Les points de rencontre des tangentes menées des sommets d'un triangle à une conique quelconque tracée dans son plan avec les côtés opposés sont six points d'une même conique.

On pourrait encore en déduire le corrélatif de ce dernier théorème.