NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE FOUCHÉ

Sur les cercles qui touchent trois cercles donnés ou qui les coupent sous un angle donné

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 331-349

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__331_1>

SUR LES CERCLES QUI TOUCHENT TROIS CERCLES DONNÉS OU QUI LES COUPENT SOUS UN ANGLE DONNÉ [1];

PAR M. MAURICE FOUCHÉ,
Agrégé de l'Université.

PROBLÈMES SUR LES CERCLES ISOGONAUX.

Nous avons vu que tous les cercles isogonaux à trois cercles donnés se répartissent en quatre faisceaux ayant chacun, pour axe radical commun, l'un des axes de similitude et, pour lieu de leurs centres, la perpendiculaire abaissée sur cet axe du centre radical des trois cercles donnés. De plus, la puissance de chaque point de l'axe radical, par rapport à tous les cercles isogonaux de la même famille, est connue. Par exemple, la puissance d'un centre de similitude de deux cercles donnés, par rapport aux cercles isogonaux, est égale au module d'inversion des deux cercles considérés relativement au centre de similitude considéré. Ces conclusions permettent de ramener aux problèmes relatifs à des faisceaux de cercles ayant même axe radical certains problèmes relatifs aux cercles isogonaux. Pour donner à ces questions toute la généralité désirable, il importe de voir ce que deviennent les conclusions précédentes lorsque

[1] *Voir* même Tome, p. 227.

quelques-uns des trois cercles donnés ou tous les trois dégénèrent en droites ou en points.

Si l'on a trois points, le seul cercle isogonal est le cercle circonscrit au triangle des trois points.

Si l'on a deux points et une droite, les cercles isogonaux sont tous ceux qui passent par les deux points. Les quatre faisceaux se réduisent ainsi à un seul.

Si l'on a deux droites et un point, les cercles isogonaux sont ceux qui ont leurs centres sur l'une des bissectrices des deux droites et qui passent par le point donné. Ils constituent ainsi deux faisceaux ayant chacun pour lieu des centres l'une des bissectrices et pour axe radical la perpendiculaire abaissée du point donné sur cette bissectrice. Les quatre faisceaux se réduisent à deux.

Si l'on a trois droites formant un triangle, les cercles isogonaux sont les cercles concentriques ayant pour centre l'un des points de concours des bissectrices intérieures ou extérieures. On peut les considérer comme formant quatre faisceaux ayant chacun pour axe radical la droite de l'infini.

Un cercle et deux points donnent un seul faisceau ayant pour axe radical la droite des deux points.

Deux cercles et un point donnent deux faisceaux ayant respectivement pour axe radical les droites qui joignent le point donné au centre de similitude.

Si enfin on a des cercles et des droites, les centres de similitude n'étant pas réduits en nombre, on aura les quatre faisceaux.

Ainsi, sauf la réduction du nombre des familles, les conclusions subsistent dans tous les cas; du reste, ces cas particuliers sont trop faciles à traiter pour qu'il soit nécessaire de s'y arrêter. Mais il en est d'autres qui méritent un examen particulier.

1° Les trois cercles donnés ont leurs centres en ligne droite. Quoique le centre radical soit rejeté à l'infini, les conclusions générales subsistent parce que chacun des centres de similitude conserve la même puissance par rapport à tous les cercles isogonaux d'un même faisceau. Les quatre faisceaux ont le même axe radical qui est la ligne des centres. Seulement, pour trouver le lieu des centres, le mieux sera de construire un cercle isogonal d'après le problème I, et d'abaisser de son centre une perpendiculaire sur la ligne des centres des cercles donnés.

2° Les trois cercles donnés ont un axe radical commun. Dans ce cas, chacun des points de la ligne des centres doit avoir la même puissance par rapport à tous les cercles isogonaux d'un même faisceau, parmi lesquels figurent les cercles orthogonaux qui appartiennent chacun aux quatre faisceaux, puisque, dans chaque groupe de deux cercles, ils correspondent à la fois aux deux centres de similitude. (Remarque II du théorème III). Donc les quatre faisceaux se confondent en un seul qui est le faisceau des cercles orthogonaux aux cercles donnés.

3° Les trois cercles donnés ont un centre de similitude commun. Les cercles isogonaux correspondants à ce centre se réduisent à des droites passant par le centre de similitude. Les trois autres familles ne subissent aucune modification.

Le fait que les cercles isogonaux à trois cercles donnés constituent quatre faisceaux déterminés donne immédiatement la solution des problèmes suivants :

Problème III. — *Construire un cercle isogonal à trois cercles donnés, passant par un point donné.*

On trace d'abord, d'après le problème I, un cercle isogonal quelconque. Si les points d'intersection L et L′ de ce cercle avec l'axe de similitude correspondant sont réels, il suffit de circonscrire un cercle au triangle ALL′. Si les points d'intersection sont imaginaires, on joindra le point A à un point quelconque H de l'axe de similitude des trois cercles donnés; on mènera de H une sécante HPQ au cercle isogonal auxiliaire; le cercle circonscrit au triangle APQ déterminera sur HA un second point A′ du cercle cherché. Comme on sait que le centre de celui-ci se trouve sur la perpendiculaire abaissée du centre radical C des trois cercles donnés sur l'axe de similitude considéré, on achèvera facilement.

Le problème est toujours possible et admet quatre solutions, une pour chaque faisceau, sauf les cas particuliers signalés plus haut.

Problème IV. — *Construire un cercle isogonal à trois cercles donnés et ayant un rayon donné.*

Il s'agit de construire le cercle d'un faisceau ayant un rayon donné. Le problème est toujours possible si les sommets du faisceau L et L′ sont imaginaires et il admet deux solutions. Si les points L et L′ sont réels, le rayon a un minimum qui est la moitié de LL′. Il en résulte que le problème admet huit solutions réelles ou imaginaires.

Problème V. — *Construire un cercle isogonal à trois cercles donnés et coupant orthogonalement un cercle donné.*

Si l'on trace deux cercles du faisceau orthogonal au faisceau des cercles isogonaux, on sera ramené à construire le cercle orthogonal à trois cercles donnés. Il suffit de tracer un seul cercle du faisceau orthogonal. Le centre du cercle cherché est à l'intersection de l'axe radical de ce cercle auxiliaire et du cercle donné avec la droite, lieu des centres du faisceau des cercles isogonaux. Si les sommets du faisceau L et L′ sont réels, l'un de ces points pourra jouer le rôle de cercle auxiliaire et la solution sera toujours réelle. En général, il y aura quatre solutions réelles ou imaginaires.

Problème VI. — *Construire un cercle isogonal à quatre cercles donnés.*

Si, parmi les quatre cercles donnés, on considère deux groupes de trois, il y aura, pour chaque groupe, quatre lieux rectilignes des centres des cercles isogonaux; le centre du cercle cherché ne peut être qu'à l'intersection de ces lieux. Soit ω l'intersection de deux lieux des centres correspondants dans chaque groupe à un même centre de similitude des deux cercles communs aux deux groupes. On pourra, de ω comme centre, décrire un cercle isogonal aux trois cercles du premier groupe : ce sera le cercle (σ) du faisceau correspondant ayant son centre en ω. On peut aussi, de ω comme centre, décrire un cercle (σ') isogonal aux trois cercles du second groupe; mais le cercle (σ) est déjà isogonal aux deux cercles communs aux deux groupes et il résulte du corollaire du théorème III que, d'un point ω comme centre, on ne peut mener qu'un seul cercle isogonal à deux cercles donnés, correspondant à un centre de similitude de ces deux cercles, car la puissance de ce centre de similitude par rapport au cercle inconnu est déterminée. Donc les cercles (σ) et (σ') n'en font qu'un qui est isogonal aux quatre cercles donnés. Si, au contraire, on prend l'intersection de deux lieux de centres correspondant à des axes de similitudes différents des deux cercles communs, les deux cercles (σ) et (σ') seront différents à moins qu'ils ne soient orthogonaux aux cercles donnés (théorème III, remarque II). Mais alors les quatre cercles donnés ont même centre radical, et ce centre radical est commun à tous les lieux de centres considérés.

Il peut arriver que le cercle (σ) soit imaginaire, mais seulement si les points communs du faisceau L et L′ sont imaginaires et si le centre ω tombe entre les deux points limites; il peut arriver aussi que le cercle (σ) étant réel ne coupe pas les quatre cercles donnés.

On peut choisir un des quatre axes de similitude du groupe de trois cercles donnés O, O_1, O_2; alors, dans le groupe O O_1 O_2, il faudra conserver le centre de similitude de O O_1 déjà choisi, de sorte que le deuxième choix ne peut porter que sur deux axes de similitude. Donc *le nombre total des solutions est de huit*.

Comme on peut faire quatre groupes de trois parmi les quatre cercles donnés et que tous ces groupes donnent évidemment la même solution, on obtient le théorème suivant :

Théorème VII. — *Étant donnés quatre cercles, choisissons leurs centres de similitude, deux à deux, de telle sorte que les centres de similitude de chaque groupe de trois cercles soient sur un même axe de similitude. Les perpendiculaires abaissées du centre radical de chaque groupe sur l'axe de similitude correspondant sont concourantes.*

Nous venons de voir que le problème VI pouvait présenter des solutions imaginaires. En dehors de ce cas, le problème peut admettre une solution singulière ou être indéterminé.

Si les deux lieux de centres qui servent à déterminer le centre ω du cercle (σ) sont parallèles, les deux axes de similitude seront parallèles, et, comme ils ont un point commun, ils se confondent : les six centres de similitude sont en ligne droite et cette droite répondra à la question. Alors, à moins que les quatre cercles n'aient leurs centres en ligne droite, les autres centres de similitude seront en dehors de la première droite et les sept autres solutions seront des cercles déterminés. Si, les six centres de similitude étant en ligne droite, les quatre cercles ont même centre radical, les deux lieux de centres coïncident; le problème sera indéterminé, tous les cercles du faisceau répondant à la question. En écartant le cas où les quatre centres seraient en ligne droite, les sept autres solutions se réduisent au cercle orthogonal. Si enfin les quatre centres sont en ligne droite, la seule solution sera la ligne des centres, sauf dans les deux cas suivants : 1° les quatre cercles ont un axe radical commun et les solutions sont les cercles orthogonaux; 2° les quatre cercles sont homothétiques, et les solutions se réduisent aux rayons d'homothétie.

Problème VII. — *Construire un cercle qui coupe trois cercles donnés sous un angle donné.*

Tous les cercles isogonaux aux trois cercles donnés se répartissent en quatre faisceaux. Si les sommets L et L′ de ces faisceaux sont réels, on est immédiatement ramené à faire passer par ces deux points un cercle qui coupe l'un des cercles donnés suivant un angle donné. Ce problème se résoud facilement, comme on sait, par l'inversion. En prenant pour pôle l'un des points donnés, le cercle cherché se transforme en une droite qui doit être tangente à un cercle concentrique au cercle transformé du cercle donné. Il suffit donc de mener par le transformé du second point une tangente à ce cercle concentrique. Il y a évidemment avantage à prendre pour module d'inversion la puissance du pôle par rapport au cercle donné, afin de conserver celui-ci. On trouve ainsi deux solutions réelles ou imaginaires.

Si les deux sommets du faisceau se confondent, c'est-à-dire si tous les centres isogonaux sont tangents entre eux, la construction s'applique encore, sauf que, le transformé du second point étant rejeté à l'infini, il faut mener au cercle concentrique des tangentes parallèles à l'axe radical du faisceau. Il en résulte que, dans ce cas, les deux solutions sont toujours réelles.

Si les sommets du faisceau ne sont pas réels, on pourra employer l'artifice suivant : Soit A l'un des points d'intersection du cercle cherché avec l'un des cercles donnés O. Par A passe un cercle orthogonal au faisceau des cercles isogonaux, lequel coupera le cercle O suivant un angle complémentaire de l'angle donné. Mais ce cercle orthogonal passe par les points limites du faisceau, lesquels sont réels et faciles à déterminer. On est donc encore ramené au même problème. Il suffira de construire un cercle passant par les points limites et coupant le cercle O sous l'angle complémentaire de l'angle donné. Les deux solutions qu'on trouvera donneront quatre points A, A', A_1, A_1', qui seront les quatre points d'intersection des deux cercles cherchés avec le cercle O. Il est inutile de se préoccuper d'assembler ces quatre points, car, partant de l'un d'eux, on pourra construire le cercle isogonal aux trois cercles donnés qui y passe, soit d'après la construction du problème I, soit plutôt par la condition qu'il est orthogonal au cercle auxiliaire. Le cercle ainsi déterminé passera par l'un des trois autres points et les deux points restants serviront à construire la deuxième solution.

Chaque faisceau de cercles isogonaux donnant deux solutions, il y a en tout huit solutions réelles ou imaginaires.

On remarquera que le raisonnement précédent permet de ramener le problème II (cercle tangent à trois cercles donnés) à la recherche du cercle passant par deux points et tangent à un cercle donné ou orthogonal à un cercle donné suivant que les points L et L′ sont réels ou imaginaires.

Enfin la construction s'applique aussi bien lorsque les cercles donnés se réduisent à des points ou à des droites.

Ce problème, qui équivaut à construire le cercle d'un faisceau coupant un cercle donné sous un angle donné, est, dans notre théorie, un problème fondamental auquel nous ramènerons tous les suivants.

DES FAMILLES DE CERCLES QUI SONT COUPÉS SOUS UN MÊME ANGLE PAR CHAQUE CERCLE D'UN FAISCEAU.

Théorème VIII. — *Tous les cercles qui coupent deux cercles fixes sous des angles constants se répartissent en deux familles telles que tous les cercles d'une même famille ont un axe de similitude commun et un centre radical commun.*

En effet, soit un cercle O qui coupe deux cercles donnés ω et ω' respectivement sous les angles α et β. Transformons la figure par inversion avec un point H de l'axe radical (D) des deux cercles ω et ω' comme pôle et un module égal à la puissance commune de H par rapport à ces deux cercles. Les cercles ω et ω' se conservent et le cercle O se transforme en un cercle O′ coupant aussi ces deux-là respectivement sous les angles α et β. En faisant varier le point H, on obtient une famille de cercles O ayant tous pour axe de similitude l'axe radical des cercles ω et ω'.

Considérons trois cercles de cette famille O, O′, O″.

Le cercle ω leur est isogonal et appartient au faisceau correspondant à l'axe de similitude (D). Donc le centre radical de $OO'O''$ est sur la perpendiculaire abaissée de ω sur (D) (théorème IV, remarque II); il se trouve donc à l'intersection C de cette perpendiculaire avec l'axe radical de O et O'. Si alors on fait varier le cercle O'', le centre radical C des trois cercles reste invariable.

Si l'on considère deux cercles O et O_1 coupant respectivement ω et ω' sous les angles α et β, il peut arriver que ω et ω', qui sont isogonaux aux cercles à O et O_1, correspondent à un même centre de similitude de O et O_1. Alors O et O_1 appartiendront à une même famille, et leur centre de similitude considéré sera sur l'axe radical (D); mais il peut se faire aussi que ω et ω' soient isogonaux à O et O_1 relativement à deux centres de similitude différents. Cela dépendra de la disposition des tangentes faisant les angles α et β (théorème III, remarque II). Dans ce cas, il n'y a aucune raison pour que l'un ou l'autre de ces centres de similitude se trouve sur l'axe radical, et chacun des deux cercles O et O_1 peut servir de point de départ à une famille construite comme précédemment.

Je dis maintenant que tout cercle coupant ω et ω', respectivement sous les angles α et β, fait partie d'une de ces deux familles. En effet, soient O et O_1 deux cercles de familles différentes et O' un cercle quelconque de l'énoncé. ω est isogonal à OO_1O' et fait partie d'un faisceau admettant pour axe radical l'un des axes de similitude. Il en est de même de ω'. Or ces deux axes de similitude se coupent en un des centres de similitude S des trois cercles. Donc les cercles ω et ω' sont isogonaux aux deux cercles admettant S pour centre de similitude relativement à ce centre S. S n'est donc pas le centre de similitude de O et O_1, autrement O et O_1 feraient partie de la même famille. Alors S est le centre de similitude de O' avec O ou O_1 et, dans les deux cas, le cercle O' appartient à l'une des familles construites en partant soit de O, soit de O_1.

La deuxième partie de la démonstration tomberait en défaut si l'axe radical des deux cercles O et O' coïncidait avec la ligne des centres $\omega\omega'$. Alors on remplacerait l'un des cercles O ou O' par un autre. Dans le cas où tous les cercles O admettraient $\omega\omega'$ pour axe radical, ils formeraient un faisceau et auraient encore tous leurs centres de similitude en ligne droite; seulement au lieu d'avoir un centre radical commun, ils en auraient une infinité situés sur leur axe radical. Dans ce cas, tous les cercles O ayant un axe radical commun, si l'on considère trois d'entre eux, les cercles qui leur sont isogonaux, tels que ω et ω', ne peuvent être que leurs cercles orthogonaux (Discussion des cas particuliers des faisceaux de cercles orthogonaux, 2°). Donc le cas ne peut se présenter que si les angles α et β sont droits.

Pour que la famille des cercles O se réduise à des cercles homothétiques, il faut et il suffit que les deux cercles ω et ω' se réduisent à des droites.

Corollaire. — *Tous les cercles enveloppant deux cercles fixes se répartissent en deux familles définies comme précédemment.* C'est le cas où les angles α et β sont nuls.

Théorème IX. — *Tous les cercles qui coupent deux cercles fixes sous des angles constants et qui appartiennent à une même famille admettent pour cercles isogonaux tous les cercles du faisceau défini par les deux cercles fixes.*

En effet, considérons trois cercles remplissant les conditions de l'énoncé O, O', O''; les deux cercles fixes ω et ω' leur sont isogonaux relativement à un même axe de similitude. Donc le faisceau correspondant des cercles isogonaux est bien le faisceau défini par les deux cercles ω et ω' et ce faisceau reste le même quand on fait varier l'un des trois cercles O, O', O''.

Théorème X. — *Tous les cercles qui coupent deux cercles fixes sous des angles constants et qui appartiennent à une même famille enveloppent deux cercles fixes réels ou imaginaires.*

Car, parmi les cercles du faisceau isogonal, figurent deux cercles tangents à trois des cercles variables (problème II), et les cercles qui coupent ces trois-là sous un angle nul coupent aussi sous un angle nul tous les cercles variables considérés (théorème IX).

Si l'on considère un faisceau quelconque de cercles, qu'on le coupe par un cercle quelconque O et qu'on transforme le cercle O par inversion en prenant pour pôle un point H de l'axe radical et pour module la puissance commune de ce point par rapport à tous les cercles du faisceau, on obtiendra, en faisant varier le point H, une famille de cercles admettant tous les cercles du faisceau comme cercles isogonaux et jouissant de toutes les propriétés précédentes.

On peut rassembler tous les résultats précédents dans l'énoncé général suivant :

Théorème XI. — *Tous les cercles d'un faisceau sont isogonaux à tous les cercles d'une famille admettant pour axe de similitude commun l'axe radical du faisceau et pour centre radical commun un point de la ligne des centres du faisceau, et enveloppant deux cercles fixes.*

A chaque faisceau de cercles correspondent une infinité de familles ainsi définies.

Chacune de ces familles peut être définie de plusieurs manières :

1° On peut se donner deux cercles du faisceau et un des cercles de la famille, ou bien deux cercles fixes et les angles α et β avec l'indication de la disposition des tangentes qui font ces angles. Les deux dispositions restent les mêmes ou changent en même temps pour tous les cercles de la famille.

2° On peut se donner les deux cercles enveloppes, avec l'indication de l'espèce des contacts d'un cercle de la famille. Pour toute la famille, les espèces des contacts restent les mêmes ou changent en même temps.

3° On peut se donner l'axe commun de similitude, le centre radical commun et un cercle de la famille.

A chaque famille ainsi définie ne correspond qu'un seul faisceau de cercles isogonaux.

Cette famille de cercles tangents à deux cercles fixes comprend comme cas particuliers :

1° Les cercles homothétiques, lorsque les deux cercles enveloppes se réduisent à deux droites;

2° Un faisceau de cercles, lorsque les deux cercles enveloppes se réduisent à deux points réels ou imaginaires.

Dans le cas général on peut, par chaque point du plan, faire passer deux cercles de la famille considérée, réels ou imaginaires, puisque par un point on peut faire passer deux cercles tangents à deux cercles donnés avec des contacts de même espèce, et deux cercles tangents avec des contacts d'espèces différentes. Le lieu des centres des cercles d'une même famille est une conique ayant pour foyers les centres des deux cercles enveloppes.

Problème VIII. — *Étant donnés deux cercles, par un point pris sur l'un d'eux faire passer un cercle qui les coupe tous deux sous des angles donnés.*

Par le point A donné sur le cercle O on mène une droite AT coupant ce cercle sous l'angle α. Le cercle cherché fait partie du faisceau des cercles tangents en A à AT. On est ainsi ramené au problème VII : *Trouver le cercle d'un faisceau qui coupe sous l'angle* β *le second cercle donné* O'.

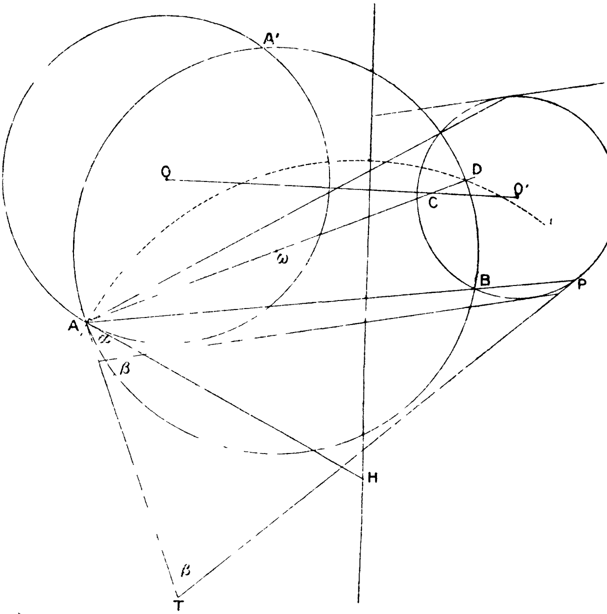
Comme on peut mener par le point A deux droites coupant le cercle O sous l'angle α et que chacune donne deux solutions, on obtient quatre solutions toujours réelles.

Ce problème est un cas particulier de celui où le point donné est quelconque dans le plan. Le problème général se résout facilement par l'inversion. En prenant pour pôle le point donné, le cercle cherché se transforme en une droite qui doit être tangente à deux cercles concentriques aux transformés des cercles donnés et dépendant des angles donnés. Il suffit donc de mener les tangentes communes à ces deux cercles concentriques.

Si, comme nous le supposons, le point donné se trouve sur l'un des cercles, il existe un tracé plus simple, fondé sur la propriété bien connue que les tangentes aux deux extrémités d'une sécante menée par l'un des points d'intersection de deux cercles font entre elles un angle égal à l'angle des cercles. On obtient ainsi la construction suivante :

Par le point A donné sur le cercle O on mène une droite AT coupant ce cercle sous l'angle α (*fig.* 4) : elle sera tangente au cercle cherché. Puis on circonscrit au cercle Q' un parallélogramme dont les côtés font avec AT l'angle β. La droite qui joint à A l'un des points de contact P coupe le cercle O′ en un second point B qui, avec le point A et la tangente AT, détermine le cercle inconnu. Deux côtés consécutifs du parallélogramme donnent les deux points d'intersection d'un même cercle cherché avec O′; les deux autres donnent une seconde

Fig. 4.



solution qui appartient à une autre famille. Comme on peut mener par A deux droites AT et AT′ faisant l'angle α avec O, on aura en tout quatre solutions toujours réelles appartenant deux par deux aux deux familles.

Remarque. — Le problème précédent fournit un moyen de déterminer le centre radical de tous les cercles d'une même famille qui coupent les cercles O et O′ sous les angles α et β. Il suffit, en effet, de choisir, parmi les quatre cercles trouvés, les deux qui appartiennent à une même famille et de prendre l'intersection de leur corde commune avec la ligne des centres de O et O'. Pour reconnaître deux cercles ω et ω' d'une même famille, soient A' et A'_1 leurs deuxièmes points d'intersection avec O. Le centre de similitude H de ω et ω' doit être sur l'axe radical de OO' et leur module d'inversion doit être égal à la puissance du point H par rapport à O. Comme le point A se correspond à lui-même sur les deux cercles ω et ω', il faudra que AH soit tangent à O et que $A'A'_1$ passe par H. Mais il y a plus. Le second point d'intersection D des cercles ω et ω' doit aussi se correspondre à lui-même dans l'inversion, donc

$$HD = HA,$$

ce qui conduit à la construction suivante :

Après avoir déterminé comme précédemment l'un des cercles ω qui coupe O en A, et tracé la tangente en A qui coupe l'axe radical en H, on décrira de H comme centre avec HA comme rayon un cercle qui coupera le cercle ω en un second point D. La droite AD sera l'axe radical des cercles ω et ω' et coupera l'axe radical de O et O' en un point C, qui sera le centre radical cherché de tous les cercles de la famille. La puissance commune de ce point par rapport à tous les cercles de la famille sera égale au produit CA.CD.

Problème IX. — *Construire un cercle qui coupe trois cercles sous des angles donnés.*

On connaît plusieurs méthodes pour résoudre ce problème. M. G Tarry en a indiqué une qui repose sur la transformation par inversion des deux cercles donnés soit en deux droites, soit en deux cercles concentriques, et sur la résolution préalable du problème VIII par un procédé différent de celui que nous venons d'indiquer (*Journal de Mathématiques élémentaires*, octobre 1889). La méthode de M. G. Tarry lui a fourni une démonstration du théorème X ainsi que de l'existence du centre radical commun; mais l'axe de similitude commun n'est pas indiqué.

Voici la méthode qui résulte de notre théorie.

Considérons tous les cercles qui coupent deux des cercles donnés O et O′ sous les angles donnés α et β et qui appartiennent à une même famille. Ils admettront un centre radical commun C qu'on sait déterminer par la remarque du problème VIII. De même, tous les cercles qui coupent O et O″ sous les angles α et γ admettent un centre radical commun C′. Connaissant les deux points C et C′ ainsi que leurs puissances par rapport au cercle considéré, on reconnaît que celui-ci fait partie d'un faisceau complètement déterminé dont CC′ est l'axe radical. Dès lors, il ne reste plus qu'à chercher les cercles de ce faisceau qui coupent le cercle O sous l'angle α (problème VII).

Pour montrer que les cercles ainsi obtenus répondent bien à la question, il suffit d'établir la proposition suivante :

Si l'on considère la famille des cercles coupant O et O′ respectivement sous les angles α et β et leur centre radical C, tout cercle ω, qui coupera O sous l'angle α et par rapport auquel C aura la même puissance que par rapport aux cercles de la famille, coupera le cercle O′ sous l'angle β.

Or, si A est l'un des points d'intersection de ω avec O, il existe deux cercles de la famille ω et ω_1 passant par A (problème VIII) par rapport auxquels C a la puissance μ.

D'autre part, il y a aussi deux cercles passant par A, coupant O sous l'angle α et tels que C ait par rapport à chacun d'eux la puissance μ, car la connaissance de la puissance μ détermine un second point du cercle considéré et l'angle α détermine la tangente en A avec l'ambiguïté de deux positions symétriques par rapport à la tangente en A au cercle O. Donc le cercle ω, qui est l'un de ces deux-là se confond avec l'un des deux cercles de la famille. C. Q. F. D.

Comme on peut combiner chaque famille correspondant au groupe OO′ avec chaque famille correspondant au groupe OO″, et que chaque combinaison donne deux solutions, le problème admet en tout huit solutions réelles ou imaginaires.

Lorsque les trois cercles passent par un même point, ce point doit être considéré comme un cercle de rayon nul répondant à la question. En effet, ce cercle de rayon nul A figure dans la famille correspondant au groupe OO′. Donc $\overline{CA}^2$ est égal à la puissance μ du point C. De même, il figure dans la famille correspondant au groupe OO″ et $\overline{C'A}^2$ est égal à la puissance de C′. Donc le point A est l'un des sommets du faisceau comprenant le cercle cherché : c'est le cercle de rayon nul du faisceau et il coupe les cercles donnés sous des angles indéterminés; donc il répond à la question. Comme il appartient aux quatre combinaisons, le nombre des solutions non singulières se réduit à quatre qui sont toujours réelles. On peut vérifier la réalité de ces quatre solutions en remarquant que, les deux sommets du faisceau A et B étant réels, et A étant sur le cercle O, si l'on fait l'inversion avec B comme pôle et la puissance de B par rapport à O comme module, A deviendra le second point d'intersection de la droite AB avec le cercle O, de sorte qu'il sera toujours extérieur au cercle concentrique intérieur défini par l'angle α, d'où il suit que les tangentes issues de ce point-là seront réelles.

Si les trois cercles O, O', O'' passent par deux mêmes points, ces points seront les seules solutions du problème, à moins que celui-ci ne soit indéterminé, ce qui arrivera si les centres radicaux des deux familles se confondent. Le problème est encore impossible ou indéterminé si les trois cercles ont un axe radical commun qu'ils ne coupent pas. Ce résultat pourrait être prévu. Si, en effet, les trois cercles O, O', O'' font partie d'un même faisceau, ils sont isogonaux à tous les cercles d'une même famille. Par suite, tous les cercles qui coupent O et O', respectivement sous les angles α et β, couperont O'' sous un même angle. Si cet angle est égal à γ, le problème est indéterminé; sinon, il est impossible, sauf les solutions singulières constituées par les sommets du faisceau. Du reste, ce cas est le seul où le problème devienne indéterminé, car, pour qu'il en soit ainsi, il faut que les cercles O, O', O'' soient isogonaux à tous les cercles de la famille correspondant au groupe OO' et alors les trois cercles O, O', O'' font partie d'un même faisceau.

(*A suivre.*)