NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. D'OCAGNE

Sur la construction de la parabole osculatrice en un point d'une courbe donnée

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 326-330

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__326_1>

SUR LA CONSTRUCTION DE LA PARABOLE OSCULATRICE EN UN POINT D'UNE COURBE DONNÉE;

PAR M. M. D'OCAGNE.

1. La parabole osculatrice p en un point A d'une courbe c est celle qui a, en ce point, avec la courbe un contact du troisième ordre (quatre points communs confondus en un seul). Cette parabole a donc, au point considéré, même tangente et même centre de courbure Ω que la courbe proposée.

En outre, sa développée a même centre de courbure Ω' que la développée de la courbe c. Or, on sait, d'après Maclaurin, que si la normale $\Omega\Omega'$ à la développée coupe le diamètre de la parabole au point D, on a, en tenant compte du sens des segments,

$$\Omega D = \frac{\Omega'\Omega}{3}.$$

Lors donc qu'on connaît les centres de courbure Ω et Ω' de la courbe c et de sa développée pour le point A, on a, par là même, le centre de courbure Ω de la parabole au point A et le diamètre AD en ce point.

Remarquons en passant que si la courbe c est une conique à centre, la droite AD n'est autre que le diamètre de cette courbe.

Nous sommes donc, en résumé, amenés à résoudre le problème suivant : *Construire une parabole connaissant un de ses points* A, *le diamètre passant par* A, *et le centre de courbure* Ω *répondant à ce point.*

Avant de donner la solution de ce problème, nous établirons quelques propositions préliminaires.

2. Si la normale menée par le point A d'une parabole coupe cette courbe au point O, prenons comme axe des x la normale AO prolongée, et comme axe des y la perpendiculaire en O à cette droite. L'équation de la parabole prend alors, comme on le voit facilement, la forme

$$(y - 2\mu x)^2 = \lambda(y - \mu x). \tag{1}$$

La droite $y - 2\mu x = 0$ est le diamètre passant en O, et la droite $y - \mu x = 0$, la tangente en ce point. Puisque le coefficient angulaire de la première de ces droites est double de celui de la seconde, celle-ci est conjuguée harmonique de l'axe des y par rapport à la première et à l'axe des x. De là ce théorème :

THÉORÈME I. — *Si la normale en* A *à la parabole rencontre cette courbe au point* O, *on a la direction de la tangente en* O *en prenant la conjuguée harmonique de la tangente en* A *par rapport à la normale et au diamètre passant en ce point.*

Prenons sur Ox un point P quelconque d'abscisse a. Du point P on peut mener à la parabole deux autres normales. Les pieds de ces normales sont, comme on le trouve aisément, sur la droite

$$(2) \qquad (2\mu^2 - 1)x - 3\mu y + a = 0.$$

Le coefficient angulaire de cette droite étant indépendant de a, cette droite a une direction fixe lorsque P varie sur Ox. Ainsi :

Théorème II. — *Lorsqu'un point se déplace sur une normale à une parabole, la droite qui joint les pieds des deux autres normales qu'on peut mener de ce point à la courbe conserve une direction fixe* (1).

Lorsque le point P se confond avec le centre de courbure Ω, le pied d'une de ces deux normales vient coïncider avec le point A. Donc :

Remarque. — *Cette direction fixe est celle de la droite qui joint le point* A *au pied de la seconde normale qu'on peut mener à la parabole du centre de courbure* Ω.

Considérons maintenant le cercle décrit sur OP comme diamètre. Son équation est

$$(3) \qquad x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Multipliant l'équation (2) par x et l'additionnant

(1) Ce théorème et le suivant se trouvent généralisés pour les courbes dont l'équation est de la forme $(y - px)^p = (y - qx)^q$ dans un Mémoire que j'ai publié en 1888 dans l'*American Journal of Mathematics*. Mais, en passant de ce cas général à celui de la parabole, j'ai commis une inadvertance d'où est résulté un énoncé incorrect auquel il faut substituer celui du théorème III ci-dessus.

membre à membre avec (3), on a

$$(y - 2\mu x)(y - \mu x) = 0.$$

C'est-à-dire que la droite (2) coupe le cercle (3) aux points où ce cercle est rencontré par la tangente et par le diamètre au point O. Donc :

Théorème III. — *Si le point* P *est pris sur la normale en* A *à une parabole que la droite* AP *rencontre encore en* O, *la droite qui joint les pieds des deux autres normales qu'on peut mener du point* P *à la parabole passe par les pieds* H *et* K *des perpendiculaires abaissées du point* P *sur le diamètre et sur la tangente en* O *à la parabole.*

Remarque. — *Si* R *et* S *sont les pieds des perpendiculaires abaissées de* P *sur le diamètre en* A *et sur la parallèle à la tangente en* O *menée par* A, *droites qui se confondent avec* PH *et* PK, *la droite* RS *est parallèle à* HK.

3. Abordons maintenant le problème que nous avons en vue.

Nous connaissons le point A, le diamètre AD et le centre de courbure Ω. Prenons la conjuguée harmonique de la tangente en A (perpendiculaire à AΩ) par rapport à AD et à AΩ. D'après le théorème I, cette droite AE sera parallèle à la tangente au second point O, encore inconnu, où AΩ rencontre la parabole.

Abaissons alors sur AD et sur AE les perpendiculaires ΩR et ΩS. La droite RS donne, d'après la remarque du théorème III, la direction de la droite joignant les points de rencontre H et K de ΩR et de ΩS avec la droite joignant les pieds des normales issues de Ω.

Mais, d'après la remarque du théorème II, cette droite passe ici par le point A. Si donc nous menons par A une parallèle à RS, cette droite coupe ΩS en un point K situé, en vertu du théorème III, sur la tangente en O à la parabole. Cette tangente étant, en outre, parallèle à AS, se trouve complètement déterminée. Elle coupe AΩ au point O.

On est, dès lors, amené à construire la parabole cherchée connaissant les points A et O et les tangentes en ces points. On sait résoudre ce problème qui se rencontre d'ailleurs fréquemment dans les applications. J'en ai, à ce propos, fait connaître une solution fort simple dans le *Génie civil* (t. IX, p. 90 et 334).