Nouvelles annales de mathématiques

G. Bruyère

Solution géométrique du problème donné au concours général en 1891

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 317-320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__317_1>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DU PROBLÈME DONNÉ AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1891 [1];

PAR M. G. BRUYÈRE,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Toulouse.

1° Soit T le plan tangent au point M de Q. Ce plan coupe les quadriques du faisceau (Q, S) suivant des coniques formant un faisceau. Je prends l'une quelconque de ces coniques (σ) correspondant à la quadrique Σ (q, s correspondant à Q et S.) Le cône C de sommet P et s'appuyant sur σ a pour axes de symétrie les droites joignant P aux sommets du triangle conjugué commun aux coniques du faisceau (q, s) : pour le démontrer, je prends l'un de ces sommets, M par exemple, et par la droite PM je mène un plan quelconque R dont la trace sur T est r, il coupe C suivant deux droites aboutissant aux points d'intersection de r et σ, A et B; je dis que le rayon conjugué de PM par rapport à PA et PB lui est perpendiculaire. Cela démontré, PM sera bien un axe de symétrie de C, car le rayon conjugué PM′ engendre le plan diamétral conjugué de PM dans C et ce diamètre sera alors perpendiculaire à son plan diamétral conjugué.

Pour démontrer cette proposition, je considère les droites joignant P aux divers points d'intersection de r

(1) Énoncé, *N. A.*, p. 353, août 1891

avec les coniques du faisceau (q, s) : nous avons ainsi un faisceau involutif dont l'un des rayons doubles est PM, deux rayons conjugués étant les droites isotropes issues de P.

L'autre rayon double est donc perpendiculaire sur PM et il est conjugué de cette droite par rapport à PA et PB : c'est donc PM'.

2° Je prends la définition suivante des sommets des cônes d'un faisceau de quadriques. « Le sommet des cônes du faisceau sont les points de l'espace ayant même plan polaire, par rapport à toutes les quadriques du faisceau. »

Dans le cas présent on connaît déjà un cône du faisceau dans la sphère de rayon nul S. Les plans polaires des points cherchés, par rapport à toutes les quadriques du faisceau, passent par P. Ces points sont donc situés sur le plan polaire π de P par rapport à Q. Soit O l'un de ces points. Ce point a même polaire par rapport à toutes les coniques du faisceau déterminé par π dans le faisceau de quadriques. Le point O est donc l'un des sommets du triangle autopolaire commun à toutes les coniques de ce faisceau.

D'ailleurs tout sommet O de ce triangle répond à la question, car les plans polaires de ce point par rapport à toutes les coniques du faisceau ont d'abord une droite commune; de plus, le point P étant le sommet de l'un des cônes du faisceau a même plan polaire π par rapport à toutes les quadriques Σ; le plan polaire de O par rapport à toutes les quadriques passent au point P et, par suite, se confondent.

Nous voyons donc qu'il y a toujours, outre le cône S, trois cônes dans le faisceau et nous savons trouver leurs sommets. Cherchons les conditions pour que l'un de ces cônes devienne un cylindre. Pour cela, il faut que l'un des sommets du triangle précédemment défini soit rejeté à l'infini.

Ce point étant rejeté à l'infini, son plan polaire commun à toutes les quadriques du faisceau est un plan diamétral pour chacune d'elles; de plus, par suite de la présence de la quadrique S dans le faisceau, le pôle commun de ce plan est rejeté à l'infini dans une direction perpendiculaire.

Les quadriques du faisceau ont donc un plan principal commun et le point P est situé dans ce plan.

Réciproquement, si le point P est donné dans un plan principal de Q, toutes les quadriques du faisceau admettent aussi ce plan principal et il y a un cylindre parmi les quadriques du faisceau, dont les génératrices sont perpendiculaires au plan principal commun.

Pour qu'une quadrique de faisceau dégénère en l'ensemble de deux plans, il faut et il suffit que les quadriques S et Q soient tangentes; il faut donc et il suffit que P soit situé sur le lieu des centres des sphères de rayon nul bitangentes à Q.

L'ensemble de deux plans formant aussi un cylindre, on sait que tous les points du lieu sont dans les plans principaux. Ce lieu se confond avec le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à Q. Il se compose de trois lignes du second ordre situées dans les plans principaux, qui sont les lignes focales de la quadrique Q.

3° Le point P et la quadrique Q étant donnés, cherchons comment doit être prise une seconde quadrique Q′ pour que la première propriété subsiste : c'est-à-dire, si nous prenons un point quelconque M de Q et le plan tangent T en ce point, qui détermine dans le faisceau (Q, Q′) un faisceau de coniques (q, q'), il faut que les cônes de sommet P et passant par une conique σ du faisceau (q, q') admettent la droite PM pour axe de symétrie. Un plan quelconque passant par PM coupe tous ces cônes chacun suivant deux rayons conjugués d'un faisceau involutif de sommet P et dont l'un des rayons doubles est PM puisque la propriété se conserve; dans ce cas, il faut encore que le rayon double autre que PM lui soit perpendiculaire, et, par suite, que les droites isotropes issues de P situées dans ce plan fassent partie du faisceau, c'est-à-dire qu'une conique du faisceau soit coupée par un plan quelconque passant par P suivant un cercle de rayon nul; or cette quadrique ne peut être que la sphère de rayon nul de centre P.

Puisque la propriété subsiste, la condition nécessaire et suffisante est donc que la quadrique Q' fasse partie du faisceau déterminé par Q et la sphère de rayon nul de centre P.

Remarque. — Lorsque dans un faisceau de quadriques il existe une sphère, toutes les quadriques du faisceau ont mêmes directions principales, car les sections par le plan de l'infini ont un triangle autopolaire commun qui est aussi conjugué par rapport à l'ombilicale, on voit donc que dans la question traitée les quadriques du faisceau QS ont même direction principale et, par suite, mêmes plans cycliques. Ceci peut encore servir à démontrer la première partie; en effet, si nous considérons tous les cônes de sommet P et s'appuyant sur les sections des quadriques du faisceau par T, ces cônes forment un faisceau, ils ont même sommet et parmi eux il y a le cône isotrope S; ils ont donc mêmes directions principales, et une direction principale du cône s'appuyant sur la section de Q par T, lequel dégénère en l'ensemble de deux plans, est la droite PM; ceci démontre la première partie.