NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. LEFÈVRE

La symétrie en coordonnées polaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 302-314

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__302_1>

LA SYMÉTRIE EN COORDONNÉES POLAIRES ;

PAR M. J. LEFÈVRE,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée d'Amiens.

Lorsqu'une courbe rapportée à des coordonnées polaires est symétrique par rapport au pôle ou possède des axes de symétrie passant par ce pôle, on peut utiliser ce centre ou ces axes pour simplifier la construction de la courbe.

Dans une première Partie nous indiquons les différentes combinaisons de ces symétries et nous donnons une règle permettant de reconnaître dans tous les cas l'arc minimum de la courbe qu'il suffit de construire directement, puis le procédé pour en déduire tout le reste de la courbe d'une façon précise.

Dans la seconde Partie, nous cherchons la forme analytique de l'équation d'une courbe quelconque possédant telle ou telle symétrie.

PREMIÈRE PARTIE [1].

Imaginons une demi-droite ou *rayon* R tournant autour du pôle à partir de l'axe polaire. Soit ω son angle avec Ox. Après avoir décrit un angle égal à 2π, il revient s'appliquer sur la même direction. Dans la suite, pour abréger le langage, nous distinguerons les uns des autres, au moyen de l'angle polaire correspondant, ces *rayons* ainsi superposés. Nous dirons : le *rayon* ω et le *rayon* $\omega + 2k\pi$.

Section I. — *Axes de symétrie.*

Soit un *rayon* faisant avec Ox l'angle α et supposons qu'en remplaçant ω successivement par $\alpha + \omega'$ et $\alpha - \omega'$ dans l'équation d'une courbe les deux équations en ρ ainsi obtenues aient les mêmes racines ; les points de la

---

[1] J'ai exposé depuis quelques années dans mon Cours les points fondamentaux de cette première Partie.

courbe sont alors deux à deux symétriques par rapport à la droite indéfinie A qui contient le *rayon* α.

Imaginons encore un autre *rayon* β tel que, si l'on remplace, dans l'équation d'une courbe, ω successivement par $\beta + \omega'$ et $\beta - \omega'$, les valeurs correspondantes de ρ dans ces deux cas sont égales et de signes contraires; les points de la courbe sont alors symétriques deux à deux relativement à la droite indéfinie B perpendiculaire à β.

Nous dirons dans ce qui suit que A est un axe de symétrie de *première espèce*, B *de seconde espèce*, et nous appellerons *rayons principaux* les rayons α et β [1].

THÉORÈME. — *Si l'on prend par rapport à un rayon principal le symétrique d'un rayon principal, on en obtient un autre de même espèce.*

Soient θ, θ' deux rayons principaux faisant entre eux un angle φ. Je dis que le symétrique D de θ relativement à θ' est un rayon principal de même espèce que θ.

Supposons par exemple θ de première espèce, les valeurs de ρ qui correspondent à deux rayons R, R_1 symétriques par rapport à θ sont les mêmes. Replions R et R_1 autour de θ', on obtient R' et R'_1. Les valeurs de ρ ne changent pas, ou bien changent toutes de signe sui-

---

(1) La recherche de rayons principaux θ, pour lesquels on remplacerait ω par $\theta + \omega'$ et $\theta + 2k\pi - \omega'$, ne donnerait rien de plus. Car si l'on prend pour nouvel axe polaire le rayon $\theta_1 = \theta + k\pi$, auquel cas l'angle polaire est $\omega'_1 = \omega' - k\pi$, on a

$$\theta + \omega' = \theta_1 + \omega'_1 \qquad \text{et} \qquad \theta + 2k\pi - \omega = \theta_1 - \omega'_1.$$

Cela revient donc a remplacer ω par $\theta_1 + \omega'_1$, puis $\theta_1 - \omega'_1$; θ_1 est par suite un rayon principal défini comme plus haut. On obtiendrait ce résultat en faisant tourner de $k\pi$ l'ensemble des rayons principaux, et l'on retrouverait les mêmes axes de symetrie.

vant que θ' est de première ou de seconde espèce; en tous cas elles sont les mêmes pour R' et R'_1. Mais R' et R'_1 sont évidemment symétriques par rapport à L : donc D est comme θ un rayon principal de première espèce.

Jusqu'ici nous n'avons fait aucune hypothèse sur la variation qu'il faut faire subir à ω pour avoir toute la courbe. Nous allons maintenant supposer cet intervalle limité, ce qui ne peut avoir lieu que de deux façons : ou bien en ajoutant $2\mu\pi$ (μ entier) à ω, l'équation en ρ ne change pas, ou bien cette équation redevient la même si l'on y change ω en $(2\mu+1)\pi+\omega$ et ρ en $-\rho$. Nous supposerons toujours cet intervalle le plus réduit possible ([1]).

Examinons séparément chacun de ces deux cas.

Premier cas. — *La courbe est obtenue tout entière en faisant varier ω d'un angle $2\mu\pi$.*

Théorème II. — *θ étant un rayon principal, tous ceux qui donnent le même axe de symétrie sont compris dans la formule $\theta + h\mu\pi$ (h entier quelconque).*

Soient, en effet, M et M' deux points de la courbe qui correspondent à $\theta-\omega$ et $\theta+\omega$ (ω compté à partir du rayon θ). Un rayon principal θ' donnant le même axe de symétrie que θ sera de la forme $\theta'=\theta+k\pi$, je dis que k est de la forme $h\mu$. En effet, soit ω' l'angle polaire compté à partir de θ', on a

$$\omega=\omega'+k\pi;$$

([1]) Il est facile de s'en assurer dans la pratique. Soit, en effet, $\lambda\pi$ l'intervalle minimum qui donne la courbe entière, si λ est inférieur à 2μ ou $(2\mu+1)$, ce sera un diviseur de ce nombre, sans quoi l'intervalle $2\mu\pi$ [ou $(2\mu+1)\pi$] reproduirait un certain nombre de fois la courbe plus une fraction de cette courbe. On essayera donc pour λ tous les diviseurs de 2μ (ou $2\mu+1$) en conservant ρ ou le changeant en $-\rho$ suivant que λ est pair ou impair.

d'où

$$\theta - \omega = \theta' - \omega' - 2k\pi,$$
$$\theta + \omega = \theta' + \omega'.$$

Si à l'argument de M on ajoute $2\mu\pi$ ou $2h\mu\pi$, ρ ne change pas, donc les deux arguments

$$\theta - \omega + 2h\mu\pi = \theta' - \omega' - 2k\pi + 2h\mu\pi,$$
$$\theta + \omega = \theta' + \omega'$$

déterminent les mêmes points M et M'.

Pour que ces deux points soient encore symétriques par rapport à l'axe correspondant à θ', il faut évidemment que $2k\pi = 2h\mu\pi$. On a donc

$$\theta' = \theta + h\mu\pi. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ceci posé, imaginons tous les rayons principaux dans la courbe. D'après le théorème II tous ceux qui donnent des axes différents sont contenus à partir de l'un d'eux θ_1 dans l'intervalle $(\theta_1, \theta_1 + \mu\pi)$. En outre, il résulte du théorème I que ces rayons sont équidistants ; sinon on en trouverait de nouveaux. Soit alors φ l'angle de deux rayons consécutifs, comme $\theta_1 + \mu\pi$ est de même espèce que θ_1, il faut que $\mu\pi$ soit un multiple de φ : $\mu\pi = m\varphi$ (m entier); d'où $\varphi = \frac{\mu\pi}{m}$. Il faut même, s'il existe à la fois des rayons principaux de première espèce et des rayons principaux de seconde espèce non confondus (ou *rayons simples*), que ces rayons alternent (th. I) et que leur nombre soit pair ($m = 2m'$), $\varphi = \frac{\mu\pi}{2m'}$.

Si un rayon principal est à la fois de deux espèces (*rayon double*), on verra plus loin (th. VI) que tous les autres sont doubles également, et que leur nombre m' est impair (seconde Partie). On a alors

$$\varphi = \frac{\mu\pi}{m'}.$$

Résolvons maintenant la question posée au commencement; nous aurons deux hypothèses à examiner :

1° *La courbe ne possède d'axes de symétrie que d'une seule espèce.* — Soient par exemple m axes de seconde espèce. Traçons les m rayons β qui recouvrent un intervalle $\mu\pi$ et numérotons-les, dans l'ordre de l'angle polaire croissant, de $\frac{\mu\pi}{m}$ en $\frac{\mu\pi}{m}$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. Soient $B_1, B_2, \ldots, B_m$ les axes respectivement perpendiculaires à ces rayons.

Construisons alors l'ensemble S_1 des arcs de la courbe obtenus en faisant varier ω entre β_1 et β_2, je dis que S_1 est l'arc minimum d'où l'on peut déduire toute la courbe. En effet, si le rayon mobile R varie de β_2 à β_3 les points M correspondant décrivent l'arc S_2 symétrique de S_1 par rapport à B_2. Donc, inversement, si l'on replie l'arc S_1 autour de B_2, ce qui donne S_2, c'est comme si l'on faisait décrire au rayon mobile R l'angle $\beta_2\beta_3$.

On repliera ensuite S_2 autour de B_3, l'arc S_3 ainsi obtenu correspond pour l'angle polaire variable à l'angle $\beta_3\beta_4, \ldots$.

Après $2m-1$ retournements, l'angle polaire aura donc parcouru $\frac{\mu\pi}{m} + (2m-1)\frac{\mu\pi}{m} = 2\mu\pi$. Nous aurons donc la courbe tout entière, mais sans superposition d'un arc déjà obtenu sur lui-même.

Tous les axes sauf B_1 ont servi deux fois.

On opérerait de même, pour des axes de première espèce.

2° *La courbe possède des axes de chaque espèce.* — Supposons d'abord les rayons principaux *simples,* c'est-à-dire d'une seule espèce à la fois, et soit m' le nombre de rayons de chaque espèce.

Numérotons les α rayons consécutifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Soient $A_1, A_2, \ldots$ les axes correspondants, soient de même $\beta_1, \beta_2, \ldots$ les rayons de deuxième espèce et $B_1, B_2, \ldots$ les axes qui sont respectivement perpendiculaires.

Supposons, par exemple, α_1, β_1 consécutifs et dans l'ordre $\alpha_1 \beta_1$. Construisons l'arc S_1 dans cet intervalle, c'est encore l'arc minimum. On en déduira tout le reste de la courbe en le repliant successivement autour des axes $B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \ldots$, et l'on aura toute la courbe au bout de $2m - 1$ retournements, tous les axes ayant servi deux fois sauf A_1.

Supposons au contraire les rayons principaux doubles. On utilisera deux fois les axes d'une même série. D'ailleurs, comme on le verra plus tard, les axes de l'autre série se trouvent ainsi utilisés d'eux-mêmes par le fait.

Deuxième cas. — *La courbe est obtenue tout entière en faisant varier* ω *de* $(2\mu + 1)\pi$.

Théorème III. — *Si toute la courbe est obtenue en faisant varier* ω *de* $(2\mu + 1)\pi$, *à tout rayon principal* θ *correspond le rayon principal d'espèce différente* $\theta' = \theta + \mu\pi + \frac{\pi}{2}$.

Soit ω l'angle polaire compté à partir de θ. Aux arguments $\theta - \omega$ et $\theta + \omega$ correspondent des rayons vecteurs ρ et $\varepsilon\rho$ ($\varepsilon = 1$ si θ est de première espèce, $\varepsilon = -1$ si θ est de deuxième espèce).

Soit ω' l'angle polaire compté à partir de

$$\theta' = \theta + \mu\pi + \frac{\pi}{2}.$$

On a

$$\omega = \omega' + \mu\pi + \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\theta' + \omega' = \theta + \omega,$$
$$\theta' - \omega' = \theta - \omega + (2\mu + 1)\pi.$$

Donc à $\theta' - \omega' - (2\mu + 1)\pi$ et à $\theta' + \omega'$ correspondent ρ et $\varepsilon\rho$; ajoutons $(2\mu + 1)\pi$ au premier arc, ρ se change en $-\rho$, donc à $\theta' - \omega'$ et $\theta' + \omega'$ correspondent $-\rho$ et $\varepsilon\rho$; θ' est donc bien un rayon principal d'espèce contraire à θ.

Soit m' le nombre des rayons principaux de première espèce, il y aura m' rayons de deuxième espèce perpendiculaires à ceux-là. En tout $m = 2m'$.

Le théorème I est encore vrai ici. Du reste, puisqu'il faut changer ρ en $-\rho$, quand on ajoute $(2\mu + 1)\pi$ à ω, ρ ne change pas si l'on ajoute $2(2\mu + 1)\pi$. On en conclut que le théorème II subsiste en y remplaçant μ par $2\mu + 1$. Les rayons principaux qui fournissent les axes distincts sont contenus dans l'intervalle $(2\mu + 1)\pi$.

Si *m' est pair*, tous les rayons principaux sont *doubles*. En effet, soit α un rayon de première espèce, il lui correspond un rayon β de deuxième espèce à la distance $(2\mu + 1)\dfrac{\pi}{2}$. D'autre part, d'après ce qui précède, tous les α partagent l'intervalle $(2\mu + 1)\pi$ en m' parties égales et, puisque m' est pair, l'un de ces rayons sera à la distance $(2\mu + 1)\dfrac{\pi}{2}$, on aura un α et un β coïncidents; donc tous les autres coïncident.

Si *m' est impair*, le même raisonnement montre qu'aucun α ne coïncide avec aucun β; donc tous les rayons sont simples. Ainsi, pour *m' pair*, l'angle φ de deux rayons principaux consécutifs sera $\varphi = \dfrac{(2\mu + 1)\pi}{m'}$; pour *$m'$ impair* $\varphi = \dfrac{(2\mu + 1)\pi}{m}$.

Quant à l'usage des axes, il est le même que dans le cas précédent, seulement on ne replie qu'une fois autour de chaque axe.

On peut donc énoncer cette règle générale :

Règle. — *On construit la courbe entre deux rayons principaux consécutifs θ, θ', puis on replie successivement l'arc, ainsi obtenu, autour des axes qui correspondent aux rayons suivants, à commencer par θ'.*

Section II. — Centre de symétrie.

Le pôle peut être centre de symétrie de trois manières :

1° Lorsque l'équation de la courbe ne change pas si l'on remplace ω par $(2\lambda+1)\pi+\omega$ (λ entier);

2° Lorsque l'équation de la courbe ne change pas si l'on change ρ en $-\rho$ et ω en $2\lambda\pi+\omega$;

3° Enfin, lorsque les valeurs de ρ correspondantes à une même valeur de ω sont deux à deux égales et de signes contraires.

Nous dirons, suivant ces trois cas, que O est un centre de symétrie de première, deuxième ou troisième espèce.

Théorème IV. — *Lorsque la courbe s'obtient en faisant varier ω de $2\mu\pi$, le pôle ne peut être centre de première espèce que si μ est impair; il ne peut être centre de deuxième espèce que si μ est pair. Il peut, d'ailleurs, être centre de troisième espèce.*

Supposons, par exemple, que O soit centre de deuxième espèce, il existe un nombre λ tel que les arguments ω et $\omega+2\lambda\pi$ donnent des points de la courbe symétriques par rapport au pôle, c'est-à-dire tels que ρ se change en $-\rho$. D'abord il est clair que $2\lambda\pi$ peut toujours être supposé inférieur à $2\mu\pi$, car on peut retrancher à ω autant de fois $2\mu\pi$ qu'on le veut. Ajoutons encore $2\lambda\pi$,

ρ change encore de signe et reprend sa valeur primitive et l'intervalle $4\lambda\pi$ reproduit toute la courbe : c'est donc l'intervalle réduit $2\mu\pi$ ou l'un de ses multiples. Si c'était un multiple, ce serait au moins $2(2\mu\pi)$ et l'on aurait $2\lambda\pi \geqq 2\mu\pi$, mais nous avons supposé $2\lambda\pi < 2\mu\pi$. Donc $4\lambda\pi = 2\mu\pi$, $\mu = 2\lambda$, donc μ est pair.

Même raisonnement si O est de première espèce.

Il en résulte que, pour reconnaître cette symétrie, il faut remplacer ω par $\mu\pi + \omega$; ρ ne doit pas changer ou doit se changer en $-\rho$, suivant que μ est impair ou pair.

Théorème V. — *Lorsque la courbe entière s'obtient en faisant varier ω de $(2\mu + 1)\pi$, le pôle ne peut être centre que de troisième espèce.*

En effet, si le pôle était centre de première ou de deuxième espèce, on verrait, comme plus haut, que $2(2\lambda)$ ou $2(2\lambda + 1)$ doivent être multiples de $2\mu + 1$, donc λ ou $2\lambda + 1$, multiples de $2\mu + 1$, ce qui est impossible, 2λ et $2\lambda + 1$ étant moindres que $2\mu + 1$.

Ainsi, dans ce cas, le pôle ne peut être centre que de troisième espèce.

Usage du centre. — Lorsque le pôle est centre de première ou de deuxième espèce, on peut abréger de moitié la variation de ω. On fera varier cet angle de o à $\mu\pi$ et l'on prendra le symétrique de l'arc obtenu par rapport au pôle. Si c'est un centre de troisième espèce, on construit seulement l'arc correspondant aux valeurs positives de ρ.

Section III. — Centre et axes.

Supposons que, le pôle étant centre, la courbe ait un axe de symétrie passant par ce point, je dis qu'elle en admet encore un second perpendiculaire au premier.

Cela est évident, géométriquement, mais nous allons donner la nature de ces axes.

1° *Le pôle est centre de première ou de deuxième espèce.* — Alors l'intervalle de variation de ω est $2\mu\pi$. Soit θ le rayon principal donné. Aux deux rayons $\theta - \omega$ et $\theta + \omega$ correspondent des valeurs ρ et $\varepsilon\rho$ ($\varepsilon = \pm 1$ suivant l'espèce de θ).

Prenons, comme nouvel axe polaire, le rayon

$$\theta' = \theta + \frac{\mu\pi}{2}.$$

On a

$$\omega' = \omega - \frac{\mu\pi}{2};$$

d'où

$$\theta + \omega = \theta' + \omega',$$
$$\theta - \omega = \theta' - \omega' + \mu\pi.$$

On peut donc dire encore que ρ et $\varepsilon\rho$ correspondent à $\theta' + \omega'$ et $\theta' - \omega' - \mu\pi$.

D'autre part, le pôle étant centre, aux deux angles $\theta + \omega$ et $\theta + \omega + \mu\pi$ correspondent ρ et $\varepsilon'\rho$ ($\varepsilon' = \pm 1$ suivant que θ est centre de première ou de deuxième espèce). On peut encore dire que ρ et $\varepsilon'\rho$ correspondent à $\theta' + \omega'$ et $\theta' + \omega' - \mu\pi$.

En résumé, $\varepsilon\rho$ et $\varepsilon'\rho$ correspondent à $\theta' - \omega' - \mu\pi$ et $\theta' + \omega' + \mu\pi$. Posons $\omega' + \mu\pi = \omega''$, $\varepsilon\rho = \rho'$.

On voit que ρ' et $\varepsilon\varepsilon'\rho'$ correspondent à $\theta' - \omega''$ et $\theta' + \omega''$.

Donc θ' est rayon principal.

Si O *est centre de première espèce,* $\varepsilon' = 1$, on voit que θ' est de même espèce que θ. Mais alors μ est impair et $\theta + \mu\frac{\pi}{2}$ est perpendiculaire à θ. Ainsi les deux axes de symétrie correspondants sont de même espèce et rectangulaires.

Si O est de deuxième espèce, à ρ' correspond — $\varepsilon\rho'$, θ' est d'espèce différente de θ, alors μ est pair et la direction de θ' s'applique sur celle de θ ou sur son prolongement. On a donc encore deux axes rectangulaires.

2° *Le pôle est centre de troisième espèce.* — Alors *tout rayon principal est à la fois des deux espèces.* Soit θ un rayon principal. A $\theta + \omega$ et $\theta - \omega$ correspondent des valeurs ρ et $\varepsilon\rho$ (ε marque l'espèce supposée de θ).

Mais à $\theta - \omega$ correspond aussi $-\varepsilon\rho$, puisque O est de troisième espèce. On voit ainsi que θ est encore de l'autre espèce.

Les deux axes de symétrie qui correspondent à ce rayon principal double seront d'espèce différente et rectangulaires.

Inversement. — Si la courbe possède deux axes rectangulaires de même espèce, O est centre de première espèce.

Si elle possède deux axes rectangulaires d'espèce différente, O est centre de deuxième ou de troisième espèce suivant que les rayons principaux correspondants diffèrent de $\frac{\mu\pi}{2}$ ou coïncident.

Cette réciproque résulte d'abord de ce que O est centre au point de vue géométrique pur et ensuite de ce que les trois cas de l'étude précédente avaient conduit à trois conclusions différentes.

Le dernier cas donne cette proposition que nous avons admise plus haut :

Théorème VI. — *Si un rayon principal est à la fois des deux espèces, le pôle est centre de troisième espèce et tous les autres rayons principaux sont à la fois des deux espèces.*

Usage de la symétrie. — Si le centre est de première ou de deuxième espèce et qu'il y ait m axes, on peut employer les m axes pour construire la moitié de la courbe, puis achever par le centre. Le centre de troisième espèce permet seulement de construire la moitié de l'axe minimum.

(*A suivre.*)