C.-A. LAISANT

# Solution de la composition de mathématiques donnée au concours d'admission à l'École polytechnique en 1892

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 11 (1892), p. 262-267

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__262_0>

# SOLUTION DE LA COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES DONNÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1892 (1);

PAR M. C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences.

1° La propriété en démonstration consiste évidemment à établir que, si l'on coupe l'hyperbole équilatère par deux sécantes rectangulaires, les produits des segments, à partir de l'intersection de ces sécantes, sont égaux (aux signes près).

Rapportons l'hyperbole à ses asymptotes, en prenant pour unité sa puissance. L'équipollence est

$$M = t + \frac{i}{t}.$$

En la coupant par une droite issue du point A, donné par $A = a\varepsilon^{\alpha}$, droite dont l'inclinaison serait $\theta$, on a

$$a\varepsilon^{\alpha} + z\varepsilon^{\theta} = t + \frac{i}{t},$$

d'où

$$a\cos\alpha + z\cos\theta = t, \qquad a\sin\alpha + z\sin\theta = \frac{1}{t},$$

et

$$\frac{z^2}{2}\sin 2\theta + az\sin(\theta + \alpha) + \frac{a^2}{2}\sin 2\alpha - 1 = 0.$$

Le produit des segments est

$$\frac{\frac{a^2}{2}\sin 2\alpha - 1}{\sin 2\theta}$$

(1) Voir l'énoncé, p. 259.

Si l'on change $\theta$ en $\theta + \frac{\pi}{2}$, on a le même produit, avec un signe contraire. La propriété est donc démontrée.

2° Soient $D = t + \frac{i}{t}$, $D' = t' + \frac{i}{t'}$. Pour que la circonférence de diamètre DD' coupe l'hyperbole en un point H, donné par $H = \tau + \frac{i}{\tau}$, il suffit qu'on ait

$$\frac{HD}{HD'} \parallel i,$$

ou

$$\frac{\tau + \frac{i}{\tau} - t - \frac{i}{t}}{\tau + \frac{i}{\tau} - t' - \frac{i}{t'}} = \frac{(\tau - t)\left(1 - \frac{i}{\tau t}\right)}{(\tau - t')\left(1 - \frac{i}{\tau t'}\right)} \parallel i.$$

c'est-à-dire

$$1 - \frac{i}{\tau t} \parallel i + \frac{1}{\tau t'},$$

$$-\frac{1}{\tau t} = \tau t', \qquad \tau^2 = -\frac{1}{tt'}.$$

Pour que $\tau$ soit réel, il faut donc que $t$, $t'$ soient de signes contraires, ou que les deux points D, D' soient sur les deux branches différentes de l'hyperbole; $\tau$ a, d'ailleurs, deux valeurs égales et de signes contraires, ce qui montre que la seconde sécante commune HH' est un diamètre de l'hyperbole.

3° Il est clair que la droite HH' appartient au lieu cherché, lequel comprend, en outre, la ligne engendrée par le point de rencontre des droites HD, H'D'. Lorsque DD' conserve la même direction, on voit immédiatement que $tt'$ est constant, ou qu'il en est de même de

$$\tau = \sqrt{-\frac{1}{tt'}}.$$

Or

$$HD = t - \tau + i\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau}\right) = (t - \tau)\left(1 - \frac{i}{t\tau}\right) \parallel 1 - \frac{i}{t\tau}.$$

De même

$$\mathrm{H'D'} \parallel 1 - \frac{i}{t'\tau}.$$

Le lieu est donc obtenu par la relation

$$\tau + \frac{i}{\tau} + u\left(1 - \frac{i}{\tau t}\right) = -\tau - \frac{i}{\tau} + v\left(1 + \frac{i}{\tau t'}\right).$$

En appelant $x$ et $y$ les coordonnées d'un point du lieu, on a

$$x = \tau + u = -\tau + v,$$

$$y = \frac{1}{\tau} - \frac{u}{\tau t} = -\frac{1}{\tau} + \frac{v}{\tau t'}.$$

De là

$$x - \tau = u, \qquad x + \tau = v, \qquad x^2 - \tau^2 = uv,$$

$$y - \frac{1}{\tau} = -\frac{u}{\tau t}, \quad y + \frac{1}{\tau} = +\frac{v}{\tau t'}, \quad y^2 - \frac{1}{\tau^2} = -\frac{uv}{\tau^2 t t'} = uv.$$

Donc $x^2 - \tau^2 = y^2 - \frac{1}{\tau^2}$ est l'équation du lieu, qui est, par conséquent, une hyperbole équilatère, dont les axes sont dirigés suivant les asymptotes de l'hyperbole donnée.

4° Rapportons l'hyperbole au diamètre $\mathrm{HH'}$ pris pour unité, et pour origine des inclinaisons, ce diamètre restant le même lorsque la direction de $\mathrm{DD'}$ est constante.

L'équipollence de l'hyperbole est, en prenant H pour origine, et en désignant par $\alpha$ l'inclinaison de la tangente en H,

$$\mathrm{HM} = \mathrm{M} = \tfrac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 2z\,\varepsilon^{\alpha}}\right).$$

Soit $\mathrm{HB} = b\,\varepsilon^{\alpha}$; B étant sur la circonférence, nous avons

$$\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BH'}} \parallel \frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{HH'}}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 2z\,\varepsilon^{\alpha}}\right) \parallel \frac{b\,\varepsilon^{\alpha}}{b\,\varepsilon^{\alpha} - 1},$$

$$z + \sqrt{z^2 - 2z\,\varepsilon^{\alpha}} \parallel \frac{1}{b - \varepsilon^{-\alpha}},$$

ou

$$b z - \sqrt{z^2 - 2z} + b\sqrt{z^2 - 2z}\,\varepsilon^{\alpha} - z\varepsilon^{-\alpha} = 1,$$

$$b\sqrt{z^2 + 2z} + z = 0.$$

De là

$$z = \frac{2b^2}{b^2 - 1}, \qquad \sqrt{z^2 - 2z} = \frac{-2b}{b^2 - 1}$$

et

$$\mathrm{HA} = \frac{b^2}{b^2 - 1} - \frac{b}{b^2 - 1}\varepsilon^{\alpha},$$

$$\mathrm{H'A} = \mathrm{HA} - \mathrm{HH'} = \mathrm{HA} - 1 = \frac{1 - b\varepsilon^{\alpha}}{b^2 - 1} = \frac{\mathrm{HH'} - \mathrm{HB}}{b^2 - 1} = \frac{\mathrm{BH'}}{b^2 - 1}.$$

H'A et BH' ont donc la même direction, c'est-à-dire que la droite AB passe par le point fixe H'.

On a, en outre,

$$\frac{\mathrm{H'A}}{\mathrm{BH'}} = \frac{1}{b^2 - 1} = \frac{\overline{\mathrm{HH'}}^2}{\overline{\mathrm{HB}}^2 - \overline{\mathrm{HH'}}^2},$$

les lignes, dans cette dernière expression, étant représentées par leurs grandeurs seulement.

Si, en particulier, on a pris $\overline{\mathrm{HB}} = \overline{\mathrm{HH'}}$, le point A s'éloignera à l'infini; autrement dit, la tangente au cercle H'HB, en H, sera parallèle à l'une des asymptotes. Si $\overline{\mathrm{HB}} = \overline{\mathrm{HH'}}\sqrt{2}$, le point H' est le milieu de AB.

Si l'on prend deux points B, $\mathrm{B}_1$ symétriques par rapport à H, on aura, pour les points A, $\mathrm{A}_1$ répondant aux cercles HH'B, $\mathrm{HH'B}_1$, $\frac{\mathrm{H'A}}{\mathrm{BH'}} = \frac{\mathrm{H'A}_1}{\mathrm{B}_1\mathrm{H'}}$, si bien que la corde $\mathrm{AA}_1$ sera parallèle à la tangente à l'hyperbole en H.

## AUTRE SOLUTION

PAR M. LAROSE,
Élève à l'École Polytechnique.

I. L'enveloppe des droites divisées harmoniquement par deux coniques est une conique qui touche les huit tangentes aux deux coniques en leurs quatre points d'intersection.

Dans le cas particulier où l'une des coniques est un cercle C, l'autre une hyperbole équilatère E, la conique enveloppe Γ, étant tangente à la droite de l'infini, est une parabole. Si l'une des cordes communes DD′ à C et à E est un diamètre de l'une des coniques C, la parabole Γ ayant deux tangentes parallèles se décompose en deux points : l'un à l'infini dans une direction perpendiculaire à DD′, l'autre P à distance finie.

La première partie est démontrée.

On remarquera que, si HI est la seconde corde commune à C et à E, P est le pôle de HI par rapport à C et le pôle de DD′ par rapport à E; de plus, HI est le diamètre conjugué dans E des cordes perpendiculaires à DD′: sa direction est donc symétrique de DD′ par rapport aux axes, ce qui résulte d'ailleurs de théorèmes connus.

II. D'après cela, les points H et I seront réels si la direction DD′ est comprise dans l'angle des asymptotes qui comprend E, imaginaires dans le cas contraire.

III. Lorsque DD′ se déplace parallèlement, HI reste fixe, elle fait partie du lieu; les rayons HD, ID′ étant également inclinés sur les axes de E, leur intersection décrira l'hyperbole équilatère qui passe par les points H et I et qui a pour asymptotes les axes de E. Dans cette hyperbole, HI est le diamètre conjugué de DD′.

IV. Cherchons combien par un point quelconque A de E passent de droites AB. Si P est le pôle dans E de la perpendiculaire élevée au milieu de HB, P est en ligne droite avec les points H et A ; or P décrit le diamètre conjugué D de DD′ dans E : donc par A passe une seule droite AB et B est le symétrique de H par rapport à la polaire DD′ par rapport à E du point P de rencontre de HA avec O.

Ainsi l'enveloppe de AB est un point.

Appliquons la construction précédente lorsque le point A est à l'infini sur l'une des asymptotes : la droite DD′ correspondante coupe la tangente en H à E sur cette asymptote et la droite AB est, dans ce cas, la parallèle à l'asymptote menée par le point I.

Le point I est donc le point fixe par lequel passent toutes les droites AB.

*Remarque.* — Les énoncés qui précèdent sont susceptibles de généralisations auxquelles je ne m'arrêterai pas. Il suffit de substituer, à C et à E, deux coniques telles que la conique enveloppe des droites qui les divisent harmoniquement se réduise à deux points ; à la droite de l'infini on fera correspondre une droite passant par l'un de ces points.