Nouvelles annales de mathématiques

G. Tarry

Sur les figures équipollentes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 251-259

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__251_0>

SUR LES FIGURES ÉQUIPOLLENTES;

PAR M. G. TARRY.

1. Dans le plan, nous dirons que deux quaternes de points, A, B, C, D et A′, B′, C′, D′, ont le même rapport anharmonique lorsque les quadrangles ABCD et A′B′C′D′ satisferont aux relations exprimées par les deux égalités

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{A'C'}{A'D'} : \frac{B'C'}{B'D'},$$

$$\widehat{CAD} - \widehat{CBD} = \widehat{C'A'D'} - \widehat{C'B'D'}.$$

Pour simplifier, nous représenterons cette double égalité par la formule symbolique

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

On démontre qu'on peut remplacer ces deux quaternes par deux autres formés des mêmes points disposés dans un ordre quelconque, à la seule condition de faire correspondre les mêmes points.

Nous appellerons *figures directement équipollentes* deux figures planes qui se correspondent point à point, de telle sorte que quatre points quelconques de l'une de ces figures aient le même rapport anharmonique que les quatre points correspondants de l'autre.

La démonstration du théorème suivant, par la Géométrie pure, ne présente aucune difficulté.

Étant donné deux ternes de points, A, B, C *et* A′, B′, C′, *qui se correspondent dans deux figures* φ *et* φ', *si l'on fait correspondre à tout point* D *de* φ *un point*

D' *de* φ' *par l'égalité*

$$(ABCD) = (A'B'C'D'),$$

à un quaterne de points quelconques dans l'une de ces figures correspond dans l'autre un quaterne de points qui a le même rapport anharmonique.

Ce qui prouve l'existence des figures directement équipollentes.

Appelons I et J' les points de chacune des figures ABC et A'B'C' qui correspondent aux points à l'infini ∞' et ∞ dans l'autre.

Nous donnerons à ces points les noms de *pôles d'inversion.*

On a immédiatement l'équipollence

$$(I \infty AB) = (\infty' J' A' B'),$$

c'est-à-dire les deux relations

$$\frac{IA}{IB} : \frac{\infty A}{\infty B} = \frac{\infty' A'}{\infty' B'} : \frac{J'A'}{J'B'},$$

$$\widehat{AIB} - \widehat{A \infty B} = \widehat{A' \infty' B'} - \widehat{A'J'B'}.$$

On voit immédiatement que

$$\frac{\infty A}{\infty B} = \frac{\infty' A'}{\infty' B'} = 1 \qquad \text{et} \qquad \widehat{A \infty B} = \widehat{A' \infty' B'} = 0.$$

On a donc les deux égalités

$$IA . J'A' = IB . J'B' \qquad \text{et} \qquad \widehat{AIB} = -\widehat{A'J'B'},$$

qui se traduisent géométriquement par cet énoncé :

Le produit des distances IA . J'A' *des pôles d'inversion de deux figures directement équipollentes à deux points correspondants dans ces figures est constant, et la bissectrice des semi-droites* IA *et* J'A' *a une direction fixe.*

Il peut arriver qu'à un point à l'infini dans l'une des figures corresponde dans l'autre un point aussi à l'infini.

Dans ce cas particulier, les deux figures sont directement semblables.

En effet, de l'équipollence

$$(A \infty BC) = (A' \infty' B'C'),$$

on déduit les égalités

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \quad \text{et} \quad \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}.$$

D'où l'on conclut que les figures directement semblables sont un cas particulier des figures directement équipollentes.

Nous appellerons *point double* de deux figures qui se correspondent point à point, tout point qui, considéré dans l'une quelconque des deux figures, se confond avec son correspondant dans l'autre.

Il est facile de voir que, dans le cas général, tout point double de deux figures directement équipollentes est le troisième sommet D d'un triangle IDJ′ dans lequel on connaît la base IJ′, qui a pour extrémités les pôles d'inversion, le produit des deux autres côtés, ID.J′D, et la direction de la bissectrice intérieure de l'angle D opposé à la base.

On sait que ce problème très connu a toujours deux solutions réelles, distinctes ou confondues.

Quand les pôles d'inversion I et J′ se confondent, la construction des points doubles est des plus simples.

Dans le cas particulier où les pôles d'inversion sont à l'infini, les deux figures directement équipollentes deviennent directement égales, l'un des points doubles est à l'infini et l'autre est le point double, ou centre de similitude, des deux figures directement semblables.

Enfin, dans le cas plus particulier où les deux figures sont directement égales et parallèles, de même sens, les deux points doubles sont à l'infini.

2. Deux figures planes sont dites *inversement équipollentes* quand une figure inversement semblable à l'une d'elles est directement équipollente à l'autre.

Soient A, B, C, D et A′, B′, C′, D′ des quaternes de points correspondants dans deux figures inversement équipollentes.

Il résulte immédiatement de notre définition qu'on a les deux égalités suivantes

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{A'C'}{A'D'} : \frac{B'C'}{B'D'},$$

$$\widehat{CAD} - \widehat{CBD} = -\left(\widehat{C'A'D'} - \widehat{C'B'D'}\right).$$

Nous exprimerons cette double égalité par la formule symbolique

$$(ABCD) = -(A'B'C'D').$$

Soient I et J′ les points de deux figures inversement équipollentes qui correspondent aux points à l'infini.

Désignons par P et P′ deux points correspondants quelconques dans ces figures.

Le produit des distances IP et J′P′ est constant et l'angle formé par les semi-droites IP et J′P′ a une grandeur invariable.

Les points I et J′ sont les pôles d'inversion des deux figures inversement équipollentes.

On voit aisément que tout point double de deux figures inversement équipollentes est le sommet D d'un triangle IDJ′ dans lequel on connaît la base IJ′, qui a pour extrémités les pôles d'inversion, l'angle opposé IDJ′, en grandeur et en signe, et le produit des deux autres côtés. Par suite, on connaît l'aire de ce triangle, et la construction des points doubles est ramenée à celle d'un triangle dans lequel on donne la base, la hauteur et l'angle au sommet, en grandeur et en signe.

D'où l'on conclut que, dans le cas général, il existe deux points doubles, réels ou imaginaires conjugués.

Si les points d'inversion se confondent, les points doubles sont les points cycliques, excepté dans le cas particulier où l'angle constant des semi-droites IP et J′P′ est nul.

Dans ce dernier cas les figures inversement équipollentes sont identiques aux figures étudiées sous le nom d'*inverses*, ou transformées par rayons vecteurs réciproques, et il est d'un haut intérêt de constater que dans ce cas particulier les points doubles sont en nombre infini. Le lieu géométrique de ces points doubles est une circonférence dont le centre est le pôle d'inversion commun aux deux figures.

Si au point à l'infini dans l'une des deux figures inversement équipollentes correspond le point à l'infini dans l'autre, les deux figures sont inversement semblables.

L'un des points doubles est à l'infini et l'autre est le point double des deux figures inversement semblables.

Enfin dans le cas très particulier où les deux figures inversement semblables sont inversement égales et symétriques par rapport à une droite, il existe une infinité de points doubles dont le lieu géométrique est la ligne droite, axe de symétrie.

3. Résumons ce qui concerne les points doubles.

Deux figures équipollentes situées sur un même plan possèdent, en général, deux points doubles.

Quand les figures sont directement équipollentes, les points doubles sont toujours réels et au nombre de deux, distincts ou confondus, propres ou à l'infini.

Quand les figures sont inversement équipollentes, elles ont, en général, deux points doubles, réels ou imaginaires conjugués, distincts ou confondus, propres ou à l'infini, et dans certains cas particuliers il existe une infinité de points doubles dont le lieu géométrique est une circonférence ou une droite. Ce lieu est une circonférence si les pôles d'inversion se confondent en un point propre et si, de plus, les segments correspondants issus du pôle commun sont parallèles de même sens, et le lieu est une droite quand les pôles d'inversion sont à l'infini et, en outre, les deux figures devenues inversement égales et placées en position de symétrie.

Dans deux figures équipollentes, directement ou inversement, les circonférences et les droites appartenant à l'une d'elles ont pour lignes correspondantes dans l'autre des droites ou des circonférences, suivant que les lignes de la première figure passent ou ne passent pas par le pôle d'inversion de cette figure.

4. De la définition que nous avons donnée des figures équipollentes on déduit immédiatement l'importante propriété suivante.

Deux ternes de points correspondants infiniment voisins, A, B, C *et* A′, B′, C′, *sont les sommets de deux triangles infiniment petits,* ABC *et* A′, B′, C′, *directement ou inversement semblables, suivant que les figures sont directement ou inversement équipollentes.*

En effet, de la relation

$$(APBC) = \pm (A'P'B'C'),$$

on déduit les égalités

$$\frac{AB}{AC} : \frac{PB}{PC} = \frac{A'B'}{A'C'} : \frac{P'B'}{P'C'},$$

$$\widehat{BAC} - \widehat{BPC} = \pm\left(\widehat{B'A'C'} - \widehat{B'P'C'}\right).$$

Si les triangles ABC, A′B′C′ tendent à devenir infiniment petits, les rapports $\frac{PB}{PC}$, $\frac{P'B'}{P'C'}$ tendent vers l'unité et les angles BPC, B′P′C′ vers zéro.

Donc, à la limite, les égalités précédentes peuvent être remplacées par les suivantes

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}, \qquad \widehat{BAC} = \pm \widehat{B'A'C'}.$$

Ainsi deux régions infiniment petites autour de deux points correspondants sont semblables.

Le coefficient de similitude entre deux telles régions varie d'un point à un autre. Les points de ces régions pour lesquelles ce coefficient a une grandeur donnée sont deux circonférences correspondantes, ayant pour centres les pôles d'inversion des deux figures équipollentes.

Dans la transformation équipollente les angles de la figure transformante se conservent dans la figure transformée; mais ces angles, égaux en grandeur absolue, ont des valeurs de même signe ou de signes contraires, suivant que les figures sont directement ou inversement équipollentes.

5. Ma théorie des figures équipollentes trouve son application naturelle dans la Géométrie de la sphère.

Elle fournit une solution élégante du problème suivant, que nous avons énoncé pour la première fois (*Nouvelles Annales*, t. X, p. 5*, question 1601) :

Inscrire dans une sphère donnée un polygone dont chaque côté passe par un point donné.

On s'appuiera sur le théorème suivant, dont la démonstration est aisée :

Quand deux figures tracées sur une sphère sont en *perspective, leurs projections stéréographiques sur un même plan sont deux figures inversement équipollentes.*

On entrevoit déjà que la théorie des figures équipollentes permettra d'étendre aux surfaces des quadriques les propriétés qui correspondent à celles des divisions homographiques sur les coniques.

La construction du polygone inscrit dans une sphère donnée et dont les côtés passent par des points donnés est ramenée, dans notre solution, à la construction des points doubles de deux figures directement ou inversement équipollentes, suivant que le nombre de côtés du polygone est pair ou impair.

Par conséquent :

Quand le nombre de côtés est pair le problème a deux solutions, toujours réelles, ou bien une infinité de solutions.

Dans ce dernier cas, très particulier, qui se présente lorsque les deux figures directement équipollentes se confondent, un point quelconque de la sphère peut être considéré comme le sommet d'un polygone satisfaisant aux conditions de l'énoncé du problème.

Quand le nombre de côtés est impair, le problème a, en général, deux solutions, réelles ou imaginaires, et en particulier une infinité de solutions.

Dans ce dernier cas, les lieux géométriques des sommets des polygones sont des circonférences.

6. Deux figures, situées sur une même sphère, sont directement ou inversement équipollentes, quand leurs projections stéréographiques, prises d'un point de vue sur la sphère, sont deux figures directement ou inversement équipollentes :

Quand deux figures situées sur une même sphère *sont directement ou inversement équipollentes, quel que soit le point de vue choisi sur la sphère, toutes leurs projections stéréographiques sont des figures directement ou inversement équipollentes.*

On voit que, pour former une figure sphérique, directement ou inversement équipollente à une figure sphérique donnée, on peut prendre arbitrairement les trois points qui correspondent à trois points désignés de la figure donnée.

Il est presque évident que deux figures équipollentes à une même figure sont équipollentes entre elles.

Une étude intéressante à faire serait celle du lieu géométrique des droites qui passent par les couples de points correspondants de deux figures équipollentes situées sur une même sphère. Les droites de cette congruence sont tellement placées dans l'espace, que, par un point quelconque non situé sur la sphère, il en passe toujours deux.