Nouvelles annales de mathématiques

E. Amigues

Note sur un problème d'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 245-249

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__245_0>

NOTE SUR UN PROBLÈME D'ALGÈBRE;

PAR M. E. AMIGUES.

1. Aucun ouvrage d'Algèbre ne donne une solution simple et complète du problème suivant :

x et z étant deux racines quelconques d'une équation algébrique entière et de degré m

$$f(u) = 0,$$

former une équation ayant pour racines les valeurs

$$y = \frac{\psi(x, z)}{F(x, z)},$$

$\psi(x, z)$ et $F(x, z)$ étant deux polynômes en x et en z qui n'admettent pour diviseur commun aucun polynôme en x, ni en z, ni en x et z.

Écrivons les équations

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

$$f(z) = 0, \tag{2}$$

$$y F(x, z) - \psi(x, z) = 0; \tag{3}$$

a, b, c, ... désignant les m racines de l'équation $f(u) = 0$, si l'on élimine x entre les équations (1) et (3), on a pour résultante

$$\Pi[y F(a, z) - \psi(a, z)] = 0, \tag{4}$$

Π représentant, comme d'habitude, le produit des m facteurs qui se déduisent de celui qui est écrit en remplaçant la racine a successivement par toutes les autres (c'est une des formes bien connues de la résultante).

Si maintenant on élimine x entre les équations (2) et (4), on a de même pour résultante

$$\Pi[y F(a, b) - \psi(a, b)] = 0. \tag{5}$$

le nouveau produit ayant m^2 facteurs.

Si l'on observe que l'équation (5) a pour racines toutes les racines demandées et rien que ces racines, on pourra dire que :

L'équation demandée s'obtient en éliminant x et z entre les équations (1), (2) *et* (3).

Cette solution si nette m'a été donnée par un de mes élèves, M. Weill, actuellement à l'École Polytechnique. Tirons-en les conséquences.

2. On peut se proposer d'obtenir l'équation en y, débarrassée des m racines pour lesquelles on a $x = z$.

Nous indiquerons deux moyens. Le premier est très connu. On remarque que le système (1), (2) et (3) est équivalent au système suivant, du moins pour les solutions que nous voulons conserver,

$$\frac{f(x) - f(z)}{x - z} = 0, \tag{6}$$

$$f(z) = 0, \tag{7}$$

$$y F(x, z) - \psi(x, z) = 0. \tag{8}$$

Cela est très facile à voir, puisque $x - z \neq 0$. Si donc on élimine x et z entre ces trois dernières équations, on aura une équation en y qui donnera toutes les racines que l'on veut conserver. Pour prouver qu'elle ne donnera que ces racines, il suffit de prouver qu'on n'aura que $m(m-1)$ valeurs de y. Or l'équation (7) donne m valeurs de z, et pour chacune d'elles, l'équation (6), qui est entière et de degré $(m-1)$, donne $(m-1)$ valeurs de x.

Voici un second moyen, *qui est presque toujours pré-*

férable. On substitue au système (1), (2) et (3) le système suivant

$$(9)\qquad \frac{f(x)-f(z)}{x-z}=0,$$

$$(10)\qquad \frac{zf(x)-xf(z)}{x-z}=0,$$

$$(11)\qquad y\mathrm{F}(x, z)-\psi(x, z)=0.$$

On voit facilement que ces deux systèmes sont équivalents, du moins pour les valeurs différentes de x et de z. On voit aussi que les équations (9) et (10) s'obtiennent, l'une en éliminant le terme indépendant des équations (1) et (2) et divisant par $x-z$, l'autre en éliminant le terme du premier degré et divisant par $x-z$.

Il n'y a donc qu'à éliminer x et z entre les équations (9), (10), (11). L'équation en y n'aura pas de racine étrangère, car les équations (9) et (10), entières et de degrés respectifs $(m-1)$ et m, ne peuvent donner plus de $m(m-1)$ solutions.

3. Si la fraction $\frac{\psi(x, z)}{\mathrm{F}(x, z)}$ est symétrique en x et z, comme elle est irréductible, les polynômes ψ et F seront aussi symétriques. Il résulte alors de la forme donnée par M. Weill à la résultante que l'équation de degré $m(m-1)$ n'a que des racines doubles. Il est intéressant de chercher l'équation de degré $\frac{m(m-1)}{2}$ qui admet les mêmes racines.

On peut *toujours* y arriver en opérant comme il suit. On forme le système (9), (10), (11). Les premiers membres de ces équations sont des fonctions entières et symétriques de x et de z.

Posons

$$x+z=\lambda_1,$$
$$xz=\lambda_2.$$

de façon que x et z soient racines de l'équation

$$t^2 - \lambda_1 t + \lambda_2 = 0,$$

alors les premiers membres des équations (9), (10) et (11) sont fonctions entières de λ_1 et λ_2. On peut les écrire

$$f_1(\lambda_1, \lambda_2) = 0. \tag{12}$$

$$f_2(\lambda_1, \lambda_2) = 0, \tag{13}$$

$$y\varphi_1(\lambda_1, \lambda_2) - \varphi_2(\lambda_1, \lambda_2) = 0. \tag{14}$$

Les termes de f_1 sont au plus de poids $(m-1)$ et ceux de f_2 au plus de poids m.

Éliminons λ_2 entre f_1 et f_2. Si m est pair, l'équation (13) contient λ_2 à la puissance $\frac{m}{2}$ au plus. Le résultant est donc au plus de degré $\frac{m}{2}$ par rapport aux coefficients de f_1 qui sont au plus de degré $(m-1)$ en λ_1. Le résultant en λ_1 est donc au plus de degré $\frac{m(m-1)}{2}$. C'est le nombre des valeurs de λ_1, par suite le nombre d'équations en t, et enfin le nombre des valeurs de y.

Si m est impair, $(m-1)$ est pair, l'équation (12) contient λ_2 à la puissance $\frac{m-1}{2}$ au plus. Le résultant qu'on obtient en éliminant λ_2 entre (12) et (13) est donc au plus de degré $\frac{m-1}{2}$ par rapport aux coefficients de (13) qui sont au plus de degré m par rapport à λ_1; donc le résultant sera encore au plus de degré $\frac{m(m-1)}{2}$ en λ_1.

Dans les deux cas, il n'y aura pas plus de $\frac{m(m-1)}{2}$ solutions pour λ_1 et λ_2 et, par suite, d'après (14), il n'y aura pas plus de $\frac{m(m-1)}{2}$ valeurs de y.

Il résulte de là que, si l'on élimine λ_1 et λ_2 entre les équations (12), (13), (14), on aura une équation en y de degré $\frac{m(m-1)}{2}$.