Nouvelles annales de mathématiques

X. Antomari

Sur un théorème de géométrie analytique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 212-216

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__212_1>

SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

PAR M. X. ANTOMARI,
Professeur au lycée Henri IV.

Par cinq points donnés, tels qu'il n'y en ait pas quatre en ligne droite, on peut faire passer une conique et une seule.

Je prends l'un des cinq points pour origine des coordonnées et soient (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$ les quatre autres. Je considère l'équation

$$\text{(1)} \qquad \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Si cette équation est du second degré, elle représente évidemment une conique passant par les cinq points donnés. Je vais alors chercher les conditions que doivent remplir les cinq points pour que l'équation s'abaisse au premier degré. Il faut évidemment pour cela que les coefficients de x^2, xy, y^2 soient nuls simultanément. Or, si l'on pose

$$\begin{aligned}
A &= (x_1y_2 - y_1x_2)(x_3y_4 - y_3x_4),\\
B &= (x_2y_3 - y_2x_3)(x_1y_4 - y_1x_4),\\
C &= (x_3y_1 - y_3x_1)(x_2y_4 - y_2x_4),
\end{aligned}$$

les trois coefficients sont respectivement

$$\begin{aligned}
L &= A(y_1y_2 + y_3y_4) + B(y_2y_3 + y_1y_4) + C(y_3y_1 + y_2y_4),\\
M &= A(x_1y_2 + y_1x_2 + x_3y_4 + y_3x_4)\\
&\quad + B(x_1y_4 + y_1x_4 + x_2y_3 + y_2x_3)\\
&\quad + C(x_1y_3 + y_1x_3 + x_2y_4 + y_2x_4),\\
N &= A(x_1x_2 + x_3x_4) + B(x_2x_3 + x_1x_4) + C(x_3x_1 + x_2x_4),
\end{aligned}$$

le second, au signe près.

D'ailleurs, à cause de l'identité

$$A + B + C = 0,$$

les valeurs de L, M, N prennent la forme

$$\begin{aligned}
L &= A(y_2 - y_3)(y_1 - y_4) + B(y_1 - y_2)(y_4 - y_3),\\
M &= A[(x_1 - x_4)(y_2 - y_3) + (y_1 - y_4)(x_2 - x_3)]\\
&\quad + B[(x_1 - x_2)(y_4 - y_3) + (y_1 - y_2)(x_4 - x_3)],\\
N &= A(x_2 - x_3)(x_1 - x_4) + B(x_1 - x_2)(x_4 - x_3).
\end{aligned}$$

Si l'on égale ces trois coefficients à zéro, les trois équations

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0$$

ainsi obtenues peuvent être vérifiées de deux manières : ou bien en prenant $A = 0$, $B = 0$; ou bien en prenant A et B différents de zéro.

Première hypothèse. — Pour que A et B soient nuls tous deux, il faut qu'un facteur de A et un facteur de B soient nuls. Quels que soient les deux facteurs ainsi choisis que l'on égale à zéro, on voit que, pour avoir simultanément $A = 0$ et $B = 0$, il faut que trois des quatre points (x_i, y_i) soient en ligne droite avec l'origine.

Deuxième hypothèse. — Soient 1, 2, 3, 4 les quatre points (x_i, y_i). Pour que les trois équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ soient vérifiées pour des valeurs de A, B non nulles simultanément, il faut que les déterminants des trois équations prises deux à deux soient nuls. On trouve ainsi les conditions

$$\frac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4} + \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} + \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4}$$

$$\frac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4}\,\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\,\frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4}.$$

Ces conditions entraînent les suivantes

$$\frac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

$$\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4};$$

ou bien les suivantes

$$\frac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4} = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4},$$

$$\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Dans les deux cas, il faut que les quatre points (x_i, y_i) soient en ligne droite.

Si donc, parmi les cinq points, il n'y en a pas quatre en ligne droite, il y a toujours une conique (qui pourra être un système de deux droites) passant par les cinq points donnés.

Remarque. — Si, parmi les cinq points, il y en a quatre en ligne droite, on voit aisément que l'équation (1) est une identité. Par exemple, supposons que les trois points 1, 2, 3 soient en ligne droite avec l'origine, nous aurons

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \lambda$$

et l'équation (1) deviendra

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y \\ x_1^2 & \lambda x_1^2 & \lambda^2 x_1^2 & x_1 & \lambda x_1 \\ x_2^2 & \lambda x_2^2 & \lambda^2 x_2^2 & x_2 & \lambda x_2 \\ x_3^2 & \lambda x_3^2 & \lambda^2 x_3^2 & x_3 & \lambda x_3 \\ x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Les coefficients de x^2, xy, y^2 sont nuls par hypothèse. Pour vérifier que le coefficient de x, par exemple, est nul, il suffit de développer ce coefficient par rapport aux éléments de sa quatrième ligne.

Le résultat auquel nous sommes conduit est évident géométriquement.

Je dis maintenant que *si parmi les cinq points il n'y en a pas quatre en ligne droite, il y a une seule conique répondant à la question.*

Je suppose, en effet, qu'il y en ait plusieurs, je prends l'un des cinq points pour origine et j'appelle

$$(2) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey = 0$$

l'équation de l'une des coniques cherchées, Σ. En exprimant qu'elle passe par les autres points (x_i, y_i), on obtient les quatre équations

$$(3) \quad ax_i^2 + 2bx_i y_i + cy_i^2 + 2dx_i + 2ey_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

x, y étant l'un quelconque des points de Σ, les équations (2) et (3) doivent être vérifiées par des valeurs de

a, b, c, d, e, non nulles simultanément, ce qui exige que l'on ait

$$\begin{vmatrix} x_1 & x\,y & y_2 & x & y \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Il en résulte que si x et y sont considérés, dans cette équation, comme des coordonnées courantes, cette équation représente *toutes les coniques* passant par les cinq points donnés. Mais il est clair que cette équation ne peut représenter plusieurs coniques que si elle se réduit à une identité; c'est-à-dire, en vertu de la première partie de la proposition, que si parmi les cinq points il en a quatre en ligne droite.

Donc, etc.