Nouvelles annales de mathématiques

Roubaudi

Solution de la question de géométrie descriptive proposée au concours d'agrégation (enseignement spécial) en 1891

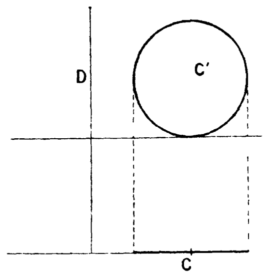
Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 199-208

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__199_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION (ENSEIGNEMENT SPÉCIAL) EN 1891;

PAR M. ROUBAUDI,
Professeur au lycée de Caen.

Dans le plan vertical de projection est tracée une verticale D *qui occupe le milieu de l'épure; autour de cette droite tourne un cercle* C *de rayon* c, *tangent au plan horizontal de projection, situé dans un plan* *parallèle au plan vertical de projection, à une distance* b *en avant de ce plan; de plus le centre de ce cercle*



est à droite du plan vertical de profil mené par D *et à une distance* a *de ce plan.*

1° *Mettre cette surface en projection;*

2° *Prouver que par chaque point* M *de cette surface il passe deux cercles* C, C_1 *tracés sur elle, dont les plans sont verticaux. En conclure que toute sphère menée par un cercle générateur* C *est tangente en deux points à la surface;*

3° *Prouver que sur chaque cercle générateur* C *il existe un couple de points réels* P, P′ *situés sur une même verticale, et qui sont tels que le plan tangent en chacun d'eux à la surface va passer au centre de la surface. En conclure que les plans tangents réels issus de ce centre à la surface enveloppent un cône de révolution;*

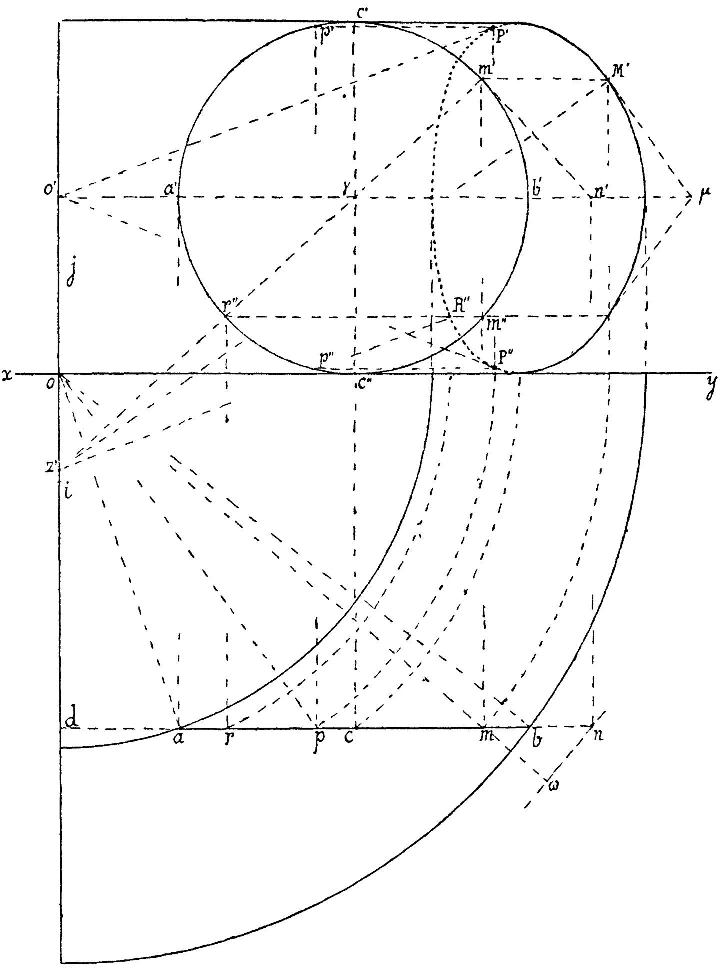
4° *On demande de construire l'intersection de la surface avec l'un des plans tangents à ce cône, perpendiculaire au plan vertical de projection. Rabattre cette intersection sur un plan horizontal.*

Données en centimètres :

$$a = 5, \qquad b = 6, \qquad c = 3.$$

Une rédaction détaillée doit accompagner l'épure ; toutes les méthodes sont admises.

1° La mise en projection de la surface ne présente



aucune difficulté. Nous ne représenterons que le quart situé dans le premier dièdre, à droite du plan de profil de l'axe. Les points (a,a'), (b,b') de la génératrice, qui sont le plus rapproché et le plus éloigné de l'axe, décrivent les parallèles de rayon minimum et maximum et formant par suite le contour apparent horizontal de la surface. Le point le plus haut (c, c') et le point le plus bas (c, c'') décrivent les parallèles supérieur et inférieur, qui font partie du contour apparent vertical. Ces quatre parallèles fournissent les points de la méridienne pour lesquels la tangente est parallèle ou perpendiculaire à l'axe. Cette courbe n'offre pas d'autres points remarquables réels; elle est symétrique par rapport à la droite $o'\gamma$, trace verticale du plan horizontal mené par le centre du cercle générateur. Le point de rencontre (o,o') de ce plan avec l'axe est le centre de la surface.

On obtient un point quelconque M' de la méridienne en amenant, par une rotation autour de l'axe, un point quelconque (m,m') de la circonférence génératrice dans le plan vertical de projection. Pour obtenir la tangente en ce point, nous remarquons que le plan de bout $m'\gamma$ est le plan normal en (m,m') à la génératrice, et par suite que son point de rencontre (o,z') avec l'axe est le sommet du cône des normales relatif au parallèle du point (m,m') : $z'M'$ est donc la normale à la méridienne; on en déduit la tangente $\mu M'$. Le point (p,p'') du cercle qui est diamétralement opposé à (m,m') fournit le point R'' en lequel la normale passe encore par z'.

On voit d'après cela que la circonférence génératrice en projection verticale et la demi-méridienne de la surface engendrée se correspondent point par point de manière que deux points homologues m' et M' sont sur une même perpendiculaire à l'axe, et que les normales en ces points se coupent sur cet axe. En d'autres termes, ces deux courbes ont même sous-normale relativement à l'axe.

De là résulte le moyen de mener d'un point quelconque z' de l'axe une normale à la méridienne.

2° Le plan mené par l'axe perpendiculairement au plan vertical ab du cercle générateur coupe ce dernier plan suivant la verticale (d, oo') : le symétrique du cercle générateur par rapport à cette verticale est situé sur la surface. Lorsque le cercle (c, γ) décrit la surface, son plan enveloppe un cylindre vertical Σ ayant pour directrice dans le plan horizontal le cercle de centre o et du rayon $od = b$. Donc tout plan tangent à ce cylindre coupe la surface suivant deux cercles et est par suite bitangent aux points de rencontre de ces cercles; les points de contact sont réels ou imaginaires suivant que la projection verticale du cercle générateur rencontre ou ne rencontre pas l'axe.

On en conclut que le cylindre Σ est doublement circonscrit à la surface; les parallèles de contact sont de part et d'autre du plan horizontal de symétrie $o'\gamma$, à la distance commune $\sqrt{c^2 - a^2}$.

Par un point quelconque m de la surface on peut mener au cylindre Σ deux plans tangents; chacun d'eux coupe la surface suivant deux cercles; deux de ces quatre cercles passent évidemment par le point M.

Considérons maintenant une sphère passant par un cercle générateur C; le symétrique C_1 du cercle C par rapport au plan méridien du centre de la sphère est situé à la fois sur la surface et sur la sphère. Donc celle-ci est tangente à la surface aux deux points de rencontre des cercles C et C_1; les deux points de contact sont situés sur une même verticale; ils sont réels ou imaginaires selon que la distance du centre de la sphère au centre du cercle C est inférieure ou supérieure à $\frac{bc}{a + c}$.

3° Cherchons la trace du plan tangent à la surface au point (m, m') du cercle générateur, sur le plan horizontal de symétrie $o'\gamma$: c'est la perpendiculaire $n\omega$ abaissée de la trace de la tangente au cercle sur le rayon om. Le plan tangent au point (m, m'') a aussi pour trace $n\omega$. Il faut chercher la position de la corde verticale $(m, m'm'')$ pour laquelle $n\omega$ passe par le point o. A cet effet, il suffit de remarquer que, les quatre points m, n, a, b formant une division harmonique, le faisceau des quatre droites ωm, ωn, ωa, ωb est harmonique, et comme les deux rayons ωm, ωn sont rectangulaires, ils sont les bissectrices des angles supplémentaires formés par les deux autres. Nous obtiendrons donc la corde cherchée, en menant la bissectrice op de $\widehat{aob}$, ce qui fournit le couple de points toujours réels (p, p'), (p, p''), en chacun desquels le plan tangent passe par le centre (o, o') de la surface. Les points (p, p'), (p, p'') fournissent les points P' et P'' de la méridienne pour lesquels les tangentes passent par le centre. Ces tangentes $o'P'$, $o'P''$ forment la méridienne d'un cône de révolution doublement circonscrit à la surface le long des parallèles des points (p, p'), (p, p''). Ce cône est évidemment l'enveloppe des plans tangents réels à la surface issus du centre.

Nous allons montrer maintenant que la surface admet un parallèle double à l'infini. Pour que deux points A et B de la génératrice décrivent le même parallèle, il faut et il suffit que ces deux points soient dans un même plan horizontal, à égales distances de l'axe; autrement, que le pied de la perpendiculaire commune à l'axe et à la droite AB tombe au milieu de la corde AB. Or, le lieu des milieux des cordes horizontales du cercle générateur est le diamètre vertical de ce cercle, et le lieu des pieds des perpendiculaires communes à l'axe et à ces cordes est la verticale du point d. Ces deux lignes droites parallèles se rencontrent en un point à l'infini qui décrit un parallèle double de la surface.

Le cône qui a pour base ce parallèle et pour sommet le centre de la surface est un cône asymptote double. Ainsi les plans tangents à la surface issus du centre enveloppent deux cônes : un cône simple réel K et un cône asymptote double imaginaire.

4° Tout plan tangent au cône réel K est bitangent à la surface aux points où la génératrice de contact rencontre les parallèles de contact du cône et de la surface : ces points sont des points doubles de la section. Celle-ci admet en outre deux points doubles à l'infini, qui sont les points de rencontre du plan sécant avec le parallèle double. Or toute surface de révolution engendrée par une conique est du quatrième ordre, à moins que l'intersection du plan de la conique avec le plan méridien, qui lui est perpendiculaire, ne soit un axe de cette conique, ce qui n'a pas lieu ici. La section est donc du quatrième ordre et comme elle présente quatre points doubles, elle se décompose en deux coniques, lesquelles, passant par les points cycliques, sont des cercles. Ainsi la section demandée se compose de deux cercles égaux.

En prenant comme plan sécant le plan de bout $o'P'$ et en désignant par u et v les longueurs oa et ob, on reconnaît très aisément que les centres (i, o'), (j, o') des cercles sont à égales distances du centre de la surface, sur la perpendiculaire menée de ce centre au plan méridien perpendiculaire au plan sécant, savoir

$$oi = oj = \frac{v - u}{2},$$

et que la longueur commune des rayons est

$$\frac{v + u}{2}.$$

En projection horizontale on a deux ellipses dont on obtient facilement les axes. Le pied o de l'axe n'est pas un foyer commun de ces ellipses, car c'est là une propriété caractéristique du tore à méridienne circulaire.

Avec les données, tous les points de la surface sont extérieurs au cylindre Σ et au cône K doublement circonscrits. On conclut que par chaque point M de la surface il passe cinq cercles réels, savoir : le parallèle, deux des quatre cercles donnés par les plans tangents au cylindre Σ menés par M, deux des quatre cercles donnés par les plans tangents au cône K menés par M.

3° Formons l'équation de la surface en la rapportant à un axe $(o, o'z')$ à son plan de symétrie horizontal $o'\gamma$. Les équations du cercle générateur sont

$$y = b, \qquad (x - a)^2 + z^2 - c^2 = 0 \tag{1}$$

et l'on a d'ailleurs

$$\overline{om}^2 = \overline{od}^2 + \overline{dm}^2 = b^2 + x^2.$$

On obtient donc l'équation de la méridienne en remplaçant dans la seconde des équations x par $\sqrt{b^2 + x^2}$, ce qui donne

$$(x^2 + z^2 + a^2 - b^2 - c^2)^2 = 4a^2(x^2 - b^2). \tag{2}$$

Enfin l'équation de la surface se déduit de cette dernière en y remplaçant x par $\sqrt{x^2 + y^2}$, ce qui fournit

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2 - c^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2 - b^2). \tag{3}$$

On peut tirer de cette équation toutes les propriétés que nous avons établies géométriquement. Proposons-nous seulement de former la section par le plan bitangent de bout $o'P'$. Désignons par α l'inclinaison de ce plan, c'est-à-dire l'angle $\widehat{P'o'b'}$, et par X, Z les coordonnées du point P'. On sait que le point P' se déduit du point p situé sur la bissectrice de l'angle $\widehat{aob}$; on a donc

$$\overline{op}^2 = oa.ob - pa.pb$$

ou

$$X^2 = uv - pa.pb.$$

Or $\dfrac{pa}{u} = \dfrac{pb}{v} = \dfrac{2c}{u+v}$; on en tire

$$pa.pb = \frac{4c^2uv}{(u+v)^2}$$

et par suite

$$X^2 = uv - \frac{4c^2uv}{(u+v)^2},$$

avec

$$(4)\qquad \begin{cases} u = \sqrt{b^2 + (a-c)^2}, \\ v = \sqrt{b^2 + (a+c)^2}. \end{cases}$$

En appelant x_1 l'abscisse du point (p, p'), l'équation (1) donne

$$Z^2 = c^2 - (x_1 - a)^2 :$$

or on a

$$x_1 = dp = da + pa = a - c + \frac{2cu}{u+v};$$

d'où

$$Z^2 = \frac{4c^2uv}{(u+v)^2}.$$

Des valeurs que nous venons de trouver pour X et Z, on tire

$$X^2 + Z^2 \quad \text{ou} \quad \overline{o'P'}^2 = uv;$$

ainsi la longueur O′P′ de la tangente à la méridienne issue du centre est moyenne proportionnelle entre oa et ob.

Puis,

$$(5)\qquad \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Z^2}} \quad \text{ou} \quad \sin\alpha = \frac{2c}{u+v}.$$

Il est aisé maintenant de former l'équation de la section de la surface par le plan debout $o'P'$: il suffit de remplacer, dans l'équation (3), x par $x\cos\alpha$ et z par $x\sin\alpha$, ce qui donne

$$(x^2+y^2+a^2-b^2-c^2)^2=4a^2(x^2+y^2-b^2-x^2\sin^2\alpha),$$

ou

$$(x^2+y^2-b^2)^2-2(a^2+c^2)(x^2+y^2-b^2)$$
$$+(a^2-c^2)^2+4a^2x^2\sin^2\alpha=0,$$

ou

$$(x^2+y^2-a^2-b^2-c^2)^2-4a^2c^2-4a^2x^2\sin^2\alpha=0.$$

En tenant compte de la relation (5) et des relations (4), desquelles on déduit

$$2(a^2+b^2+c^2)=u^2+v^2 \qquad \text{et} \qquad 16a^2c^2=(u^2-v^2)^2,$$

on peut mettre, après quelques transformations, l'équation précédente sous la forme

$$x^4-2x^2(uv-y^2)+y^4-y^2(u^2-v^2)-u^2v^2=0,$$

d'où l'on tire

$$x^2-uv=-y^2\pm y(u-v),$$

qu'on peut écrire

$$x^2+\left(y\mp\frac{u-v}{2}\right)^2=\left(\frac{u+v}{2}\right)^2,$$

équation de l'ensemble de deux cercles ayant pour rayon commun $\frac{u+v}{2}$, et dont les coordonnées des centres sont $x=0$, $y=\pm\frac{u-v}{2}$.

Le demi petit axe des ellipses projections horizontales de ces cercles est égal à $\frac{u-v}{2}\cos\alpha$ et, par suite, la demi-distance focale est égale à $\frac{u-v}{2}\sin\alpha$ ou c. Ainsi la distance focale de ces ellipses est égale au diamètre du cercle générateur.