ERNEST MALO

Sur le calcul par approximation des racines des équations numériques. Modification de la formule de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 169-178
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__169_1>

SUR LE CALCUL PAR APPROXIMATION DES RACINES DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES. MODIFICATION DE LA FORMULE DE NEWTON;

PAR M. ERNEST MALO.

M. Ch. Zenger a fait connaître, dans le tome XI du *Journal de Mathématiques et de Physique de Prague*, une méthode pour le calcul d'une racine d'une équation algébrique au moyen d'une première valeur approchée, qui présente beaucoup d'analogie avec celle de Newton, et qui, ce me semble, peut donner matière à des remarques intéressantes. Voici d'abord l'analyse de l'auteur telle qu'elle est résumée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XIII, p. 211.

Soient a la valeur approchée, α la valeur exacte de la racine, on pose d'une part $x = ay$, de l'autre $x = \alpha z$, de sorte que de l'équation

$$0 = f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,$$

on tirera les deux suivantes

$$B_0 y^m + B_1 y^{m-1} + \ldots + B_m = 0.$$
$$C_0 z^m + C_1 z^{m-1} + \ldots + C_m = 0,$$

les coefficients étant respectivement

$$\begin{array}{lllll} B_0 = A_0, & B_1 = A_1 a^{-1}, & \ldots, & B_i = A_i a^{-i}, & \ldots, \\ C_0 = A_0, & C_1 = A_1 \alpha^{-1}, & \ldots, & C_i = A_i \alpha^{-i}, & \ldots, \end{array}$$

valeurs aisément calculables par logarithmes.

Comme d'ailleurs la deuxième équation doit être satisfaite pour $z = 1$, on a

$$C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_m = 0.$$

Si maintenant l'on remplace a par $a + da$ où da désigne $\alpha - a$, les valeurs B_0, B_1, ..., B_i, ... deviennent C_0, C_1, ..., C_i, ..., de sorte que les accroissements dB_0, dB_1, dB_i, ... satisfont à la relation

$$B_0 + B_1 + dB_1 + B_2 + dB_2 + \ldots + B_m + dB_m = 0.$$

En mettant alors, au lieu des accroissements dB_i les différentielles tirées des relations

$$B_i = A_i a^{-i},$$

ou plutôt

$$\log B_i = \log A_i - i \log a,$$

il vient, écrivant ε au lieu de la somme $B_0 + B_1 + \ldots + B_m$,

$$da = \frac{a\varepsilon}{\varepsilon - B_0 + B_2 + 2B_3 + \ldots + (m-1)B_m}.$$

J'observerai maintenant, à l'égard de la formule de M. Zenger, qu'elle peut s'écrire ainsi qu'il suit, en désignant par h', au lieu de da, la correction à opérer sur la première valeur approchée a,

$$h' = -\frac{a f(a)}{a f'(a) - m f(a)},$$

et, pour l'établir à nouveau, je la rattacherai expressément à la formule de correction de Newton, dont manifestement elle ne diffère que par un terme du second ordre.

A cet effet, je considérerai l'équation $\Phi(x) = 0$, qui est la transformée aux inverses des racines de la proposée et qui, par suite, est fournie par la relation

$$\Phi(x) = x^m f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cela étant, et a désignant une valeur approchée d'une racine de l'équation $f(x) = 0$, $b = \frac{1}{a}$ sera une valeur approchée d'une racine de l'équation $\Phi(x) = 0$, dont on déduira une valeur plus approchée en adjoignant à b le terme correctif

$$k = -\frac{\Phi(b)}{\Phi'(b)}.$$

Il en résulte, réciproquement, une valeur plus approchée pour la racine considérée de l'équation $f(x) = 0$, savoir

$$\frac{1}{b+k} = \frac{1}{b} - \frac{k}{b^2},$$

en négligeant les termes du second ordre, ou encore

$$a - ka^2,$$

puisque $b = \frac{1}{a}$.

D'autre part, la différentiation de la relation

$$\Phi(x) = x^m f\left(\frac{1}{x}\right)$$

conduit à celle-ci

$$\Phi'(x) = mx^{m-1} f\left(\frac{1}{x}\right) - x^{m-2} f'\left(\frac{1}{x}\right),$$

et l'on en déduit, par la division membre à membre avec la précédente,

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi'(x)} = \frac{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)}{mx f\left(\frac{1}{x}\right) - f'\left(\frac{1}{x}\right)};$$

donc, pour $x = b = \frac{1}{a}$,

$$h = -\frac{\Phi(b)}{\Phi'(b)} = \frac{f(a)}{a[a f'(a) - m f(a)]},$$

de sorte que la valeur corrigée $a - ha^2$ devient

$$a - \frac{a f(a)}{a f'(a) - m f(a)},$$

et qu'en la représentant par $a + h'$ on a bien

$$h' = -\frac{a f(a)}{a f'(a) - m f(a)}.$$

Cette expression est très remarquable en ce sens qu'elle est, dans une large mesure indéterminée. Voici ce qu'il faut entendre par cette indétermination.

Considérant l'équation $f(x) = 0$, si l'on augmente ou diminue toutes les racines d'un même nombre ξ, on est conduit à une certaine transformée $F(x) = 0$. Or si a désigne toujours une valeur approchée d'une racine de $f(x)$, $a' = a + \xi$ sera aussi une valeur approchée d'une racine de $F(x)$, et les corrections à faire subir, d'après la méthode de Newton, aux valeurs approchées a et a' seront, respectivement,

$$-\frac{f(a)}{f'(a)} \quad \text{et} \quad -\frac{F(a')}{F'(a')};$$

mais, manifestement, $F(a') = f(a)$ et $F'(a') = f'(a)$, puisque les deux fonctions et les deux dérivées correspondent à un seul et même élément ponctuel ou tangentiel d'une courbe considérée seulement par rapport à deux origines différentes, en sorte qu'on n'a point deux corrections différentes, mais une seule.

Il n'en est pas de même si l'on considère les corrections fournies par la formule donnée précédemment, car elles sont, d'une part,

$$-\frac{a f(a)}{a f'(a) - m f(a)},$$

et de l'autre,

$$-\frac{a' F(a')}{a' F'(a') - m F(a')};$$

or, en raison justement des égalités $F(a') = f(a)$, $F'(a') = f'(a)$, la seconde expression, qui se réduit à

$$-\frac{a' f(a)}{a' f'(a) - m f(a)},$$

ne peut pas coïncider avec la première. En définitive, il résulte de cette analyse que, a étant une valeur approchée d'une racine d'une équation $f(x) = 0$, on en a une nouvelle valeur approchée, en adjoignant à a le terme de correction

$$h' = -\frac{\lambda f(a)}{\lambda f'(a) - m f(a)},$$

où λ est un nombre, non pas évidemment entièrement arbitraire, mais du moins susceptible de varier entre des limites fort étendues.

Lorsqu'on substitue à x, dans la fonction $f(x)$, la valeur fournie par la correction newtonienne

$$x = a + h,$$

on a

$$f(a+h) = \frac{h^2}{2} f''(a) + \ldots.$$

en sorte que si la valeur initiale a est suffisamment approchée, c'est-à-dire h assez petit, le signe du résultat est celui de $f''(a)$. Quel est le signe du résultat de la substitution $a + h'$? En se bornant aux trois premiers termes du développement

$$f(a + h') = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \dots,$$

on trouve

$$f(a + h') = \frac{\lambda f^2(a)[\lambda f''(a) - 2mf'(a)] + 2mf^3(a)}{2[\lambda f'(a) - mf(a)]},$$

où le dernier terme du numérateur est du troisième ordre et peut être négligé. Le signe est donc celui du produit

$$\lambda[\lambda f''(a) - 2mf'(a)],$$

et la présence de l'indéterminée λ permet de le choisir à volonté. Ainsi en donnant à λ deux valeurs λ et λ_1 qui rendent la quantité entre crochets de signes contraires, on a deux corrections h' et h'_1, telles que la différence $h_1 - h'_1$, prise en valeur absolue, mesure l'erreur commise et dont la moyenne $\frac{h' + h'_1}{2}$ pourra être adoptée pour servir de point de départ à de nouvelles corrections. On prendra garde à ne point choisir les quantités λ et λ_1 trop voisines l'une de l'autre, parce que, les corrections h' et h'_1 tendant alors à ne laisser subsister qu'une erreur du troisième ordre, on ne pourrait plus se rendre compte de la valeur exacte de cette erreur, encore qu'elle soit, d'une façon générale, aussi réduite que possible.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

considérée par Lagrange, on a, pour $a = -3$,

$$f = 1, \qquad f' = 20, \qquad f'' = -18,$$

et les valeurs $\lambda = -6$, $\lambda_1 = -7$ rendent respectivement négative et positive l'expression $\lambda f'' - 2mf'$. Donc

$$h' = -\frac{6}{123} = -0,048780,$$

$$h'_1 = -\frac{7}{143} = -0,048951,$$

$$h - h'_1 = 0,000171, \qquad \frac{h' + h'_1}{2} = -0,048865;$$

ainsi l'erreur de h', de h'_1 et *a fortiori* de $\frac{h'+h'_1}{2}$ n'atteint pas 0,00017; la valeur exacte à six décimales de la racine cherchée étant

$$-3,048917,$$

les erreurs véritables sont, pour h',

$$-0,000137,$$

pour h'_1,

$$+0,000034,$$

enfin, pour $\frac{h'+h'_1}{2}$,

$$-0,000048.$$

Pour la correction newtonienne $h = -\frac{1}{20} = -0,05$, elle est de

$$0,001082.$$

Pour obtenir une deuxième approximation, on fera $a = -0,0489$ dans la transformée en $-3+x$, c'est-à-dire dans

$$F(x) = x^3 - 9x^2 + 20x + 1.$$

On a alors

$$F = 0,00036218,$$
$$F' = 20,88737;$$

quant à la valeur de λ, on peut évidemment prendre, comme ci-dessus, $\lambda = -7$. Il vient donc

$$h' = -\frac{0,00253526}{146,21268} = -0,0000173395538,$$

nombre dont toutes les décimales peuvent être considérées comme exactes, de sorte que la valeur de la racine est

$$-3,048917339538.$$

On peut évidemment donner une infinité d'expressions du terme de correction à joindre à une valeur approchée d'une racine d'une équation numérique, expressions se rattachant à celles de Newton et en résultant par l'application de sa méthode à une transformée quelconque de la proposée, ou par une altération directe infiniment petite des deux termes de la correction newtonienne. Comme vraisemblablement aucune de ces expressions ne présente, au même degré que celle qui vient d'être établie, le caractère de simplicité et de commodité désirables en cette matière, j'en examinerai une seulement.

Si l'on pose

$$\Phi(x) = (-1)^m f(\sqrt{x}) f(-\sqrt{x}).$$

$\Phi(x) = 0$ est la transformée aux carrés des racines de l'équation $f(x) = 0$, et, par suite, a étant une valeur approchée d'une racine de celle-ci, $b = a^2$, est une valeur approchée d'une racine de $\Phi(x) = 0$. Appliquant à cette valeur b la correction newtonienne $k = -\frac{\Phi(b)}{\Phi'(b)}$, on en déduit réciproquement une nouvelle valeur approchée de la racine de $f(x)$, savoir

$$\sqrt{b + k} = \sqrt{b} + \frac{k}{2\sqrt{b}},$$

aux termes près du second ordre. Du reste, en différentiant l'égalité qui définit $\Phi(x)$, on en tire celle-ci

$$\Phi'(x) = \frac{(-1)^m}{2\sqrt{x}}\left[f(-\sqrt{x})f'(\sqrt{x}) - f(\sqrt{x})f'(-\sqrt{x})\right]$$

et, par division,

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi'(x)} = 2\sqrt{x}\,\frac{f(\sqrt{x})f(-\sqrt{x})}{f(-\sqrt{x})f'(\sqrt{x}) - f(\sqrt{x})f'(-\sqrt{x})}.$$

Il vient donc, pour $x = b = a^2$,

$$-k = \frac{\Phi(b)}{\Phi'(b)} = 2a\,\frac{f(a)f(-a)}{f(-a)f'(a) - f(a)f'(-a)},$$

de sorte que la nouvelle valeur approchée de la racine de $f(x)$, c'est-à-dire

$$\sqrt{b} + \frac{k}{2\sqrt{b}} = a + \frac{k}{2a},$$

peut s'écrire

$$a + h',$$

h' ayant la valeur

$$-\frac{f(a)f(-a)}{f(-a)f'(a) - f(a)f'(-a)},$$

qu'on peut écrire encore

$$-\frac{f(a)}{f'(a) - f(a)\dfrac{f'(-a)}{f(-a)}}.$$

Ici, comme précédemment, si l'on fait un changement d'origine, les valeurs de $f(a)$ et de $f'(a)$ ne seront pas altérées, tandis que celles de $f(-a)$ et de $f'(-a)$ changeront avec l'origine. L'expression de h' peut donc être écrite d'une façon générale sous la forme

$$-\frac{f(a)}{f'(a) - f(a)\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}},$$

où ξ a une valeur quelconque. Si l'on considère que $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}$ peut prendre, pour m valeurs de ξ une valeur $\left(\frac{m}{\lambda}\right)$ assignée d'avance, on retombe purement et simplement sur la forme déjà considérée. Et si l'on se propose d'utiliser la forme spéciale sous laquelle s'est présentée ici le paramètre indéterminé $\left(\frac{m}{\lambda}\right)$, on trouve que la question se complique sans aucune compensation du côté de la précision, car la variation de $\left(\frac{m}{\lambda}\right)$ est généralement très grande par rapport à celle de ξ.

Il y a donc lieu de se borner à l'expression

$$h' = -\frac{\lambda . f(a)}{\lambda f'(a) - m f(a)},$$

où l'on prendra successivement pour $m\lambda^{-1}$ les deux nombres entiers consécutifs entre lesquels tombe la racine de l'équation

$$\frac{\lambda}{2} . f''(a) - m f'(a) = 0.$$

On aura alors l'avantage d'avoir un terme de correction sensiblement aussi simple que celui de Newton, et dont l'erreur, réduite autant qu'il est possible, n'exige point pour être estimée l'emploi simultané de la méthode des parties proportionnelles.