VOGT

Sur les angles et les distances en coordonnées trilinéaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 148-158

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__148_1>

SUR LES ANGLES ET LES DISTANCES EN COORDONNÉES TRILINÉAIRES;

PAR M. VOGT,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Nancy.

1. Si l'on considère un triangle de référence et les distances d'un point aux trois côtés de ce triangle, affectées d'un signe convenable, on appelle ordinairement *coordonnées trilinéaires* de ce point trois nombres respectivement proportionnels à ces distances ou aux produits de ces distances par trois coefficients fixes appelés *paramètres de référence*.

Lorsque l'on veut établir les formules relatives à l'angle de deux droites, à la distance d'un point à une droite, ou reconnaître si une équation représente un cercle, on commence par établir ces formules dans un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires; les équations des côtés du triangle de référence dans ce système fournissent des formules de transformation qui permettent de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées trilinéaires, et conduisent au résultat cherché.

Les relations métriques qui existent entre les éléments d'une figure ne sont autres que les relations qui lient ces éléments aux points cycliques du plan. Laguerre a montré (*Nouvelles Annales*; 1859) que l'angle de deux droites a pour expression $\varphi = \frac{i}{2} \log \alpha$, α étant le rapport anharmonique du faisceau formé par ces droites et celles qui joignent le sommet de l'angle aux points cycliques. M. Klein, dans un remarquable article [*Ueber die sogenannte nicht euklidische Geometrie* (*Mathematische Annalen*, Bd. IV)], a donné les formules générales qui lient les éléments d'une figure à ceux d'une conique fixe fondamentale du plan; lorsque cette conique se réduit à deux points imaginaires conjugués, on peut retrouver les formules de la Géométrie ordinaire. Je vais montrer que les calculs, dans ce cas, donnent toutes les formules de la théorie des coordonnées trilinéaires.

DES COORDONNÉES DE POINTS ET DE DROITES.

2. Étant donné un triangle ABC, nous déterminerons la position d'une droite indéfinie passant par A, au moyen d'un paramètre α qui ne diffère que par un facteur constant du rapport des segments qu'elle détermine sur le côté BC; ce paramètre, variant de zéro à $+\infty$, lorsque la droite passe de la position AC à la position AB en décrivant l'angle intérieur du triangle. De même, nous fixons la position d'une droite issue de B par un paramètre β, proportionnel au rapport des segments

qu'elle détermine sur AC et variant de zéro à $+\infty$, lorsque la droite passe de BA à BC.

Les deux nombres α et β déterminent alors deux droites AM, BM et peuvent être employés comme coordonnées de leur point M de rencontre; mais nous poserons

$$\frac{y}{z} = \alpha, \qquad \frac{z}{x} = \beta,$$

et les trois nombres x, y, z, ainsi déterminés par leurs rapports, seront appelés *coordonnées du point* M. Nous ajouterons pour la symétrie : $\frac{x}{y} = \gamma$; le nombre γ, qui satisfait à la relation $\alpha\beta\gamma = 1$, servira à définir la position de la droite CM; ce paramètre est proportionnel au rapport des segments déterminés par CM sur le côté AB.

3. Toute droite est représentée par une équation du premier degré entre les coordonnées de ses points. En effet, les rayons joignant les points A et B à un point de la droite forment deux faisceaux homographiques ayant le rayon AB homologue commun; il existe entre α et β une relation linéaire de la forme

$$\frac{-u}{\beta} + v\alpha + w = 0;$$

par suite, on a

$$ux + vy + wz = 0.$$

Et, réciproquement, toute relation de cette forme représente une droite, car elle définit deux faisceaux homographiques de sommets A et B ayant un rayon homologue commun.

Par définition, u, v, w sont appelés les *coordonnées de la droite*. Par analogie avec ce qui précède, on peut remarquer que, si l'on prend les points de rencontre d'une droite avec les trois côtés du triangle de référence, les rapports

$$\alpha' = -\frac{w}{v}, \qquad \beta' = -\frac{u}{w}, \qquad \gamma' = -\frac{v}{u}$$

sont respectivement proportionnels aux rapports des segments déterminés par ces points de rencontre sur les côtés correspondants; de plus

$$\alpha'\beta'\gamma' = -1.$$

Toute relation du premier degré entre u, v, w

$$u x_0 + v y_0 + w z_0 = 0$$

détermine le point qui a pour coordonnées $x_0 y_0 z_0$ et est l'équation de ce point. La théorie de la ligne droite et du point se déduit de ce qui précède.

DES POINTS CYCLIQUES ET DES ANGLES.

4. Considérons dans le plan deux points fondamentaux ou points cycliques, dont les coordonnées sont imaginaires conjuguées; soient I et J ces deux points,

$$\begin{array}{lll} \xi + i\xi', & \eta + i\eta', & \zeta + i\zeta', \\ \xi - i\xi', & \eta - i\eta', & \zeta - i\zeta', \end{array}$$

leurs coordonnées; la droite qui les joint est appelée *droite fondamentale* ou *droite de l'infini*, et a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation tangentielle des deux points cycliques, si l'on pose

$$p(u) = \xi u + \eta v + \zeta w,$$
$$p'(u) = \xi' u + \eta' v + \zeta' w.$$

est

$$\begin{aligned}\varphi(uvw) &= [p(u) + ip'(u)][p(u) - ip'(u)]\\ &= p(u)^2 + p'(u)^2\\ &= (\xi^2 + \xi'^2)u^2 + (\eta^2 + \eta'^2)v^2 + (\zeta^2 + \zeta'^2)w^2\\ &\quad + 2(\eta\zeta + \eta'\zeta')vw + 2(\zeta\xi + \zeta'\xi')wu + 2(\xi\eta + \xi'\eta')uv = 0.\end{aligned}$$

L'angle de deux droites $(u_0 v_0 w_0)$, $(u_1 v_1 w_1)$ sera, par définition, fourni par la relation

$$V = \frac{i}{2}\log\rho,$$

ou bien

$$\rho = \frac{1 - i\,\mathrm{tang}\,V}{1 + i\,\mathrm{tang}\,V},$$

ρ étant le rapport anharmonique que forment les droites avec celles qui joignent le sommet de l'angle aux points cycliques.

Si

$$u_0 + \lambda_1 u_1,\quad v_0 + \lambda_1 v_1,\quad w_0 + \lambda_1 w_1;$$
$$u_0 + \lambda_2 u_1,\quad v_0 + \lambda_2 v_1,\quad w_0 + \lambda_2 w_1$$

sont les coordonnées de ces dernières droites, on a

$$\lambda_1 = -\frac{p(u_0) + ip'(u_0)}{p(u_1) + ip'(u_1)},\qquad \lambda_2 = -\frac{p(u_0) - ip'(u_0)}{p(u_1) - ip'(u_1)},$$

et le rapport ρ est égal à $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, ou bien

$$\rho = \frac{p(u_0)p(u_1) + p'(u_0)p'(u_1) + i[p'(u_0)p(u_1) - p(u_0)p'(u_1)]}{p(u_0)p(u_1) + p'(u_0)p'(u_1) - i[p'(u_0)p(u_1) - p(u_0)p'(u_1)]}.$$

On en conclut

$$\mathrm{tang}\,V = -\frac{p'(u_0)p(u_1) - p(u_0)p'(u_1)}{p(u_0)p(u_1) + p'(u_0)p'(u_1)},$$

$$\sin V = \frac{p'(u_0)p(u_1) - p(u_0)p'(u_1)}{\sqrt{\varphi(u_0 v_0 w_0)}\sqrt{\varphi(u_1 v_1 w_1)}},$$

$$\cos V = -\frac{p(u_0)p(u_1) + p'(u_0)p'(u_1)}{\sqrt{\varphi(u_0 v_0 w_0)}\sqrt{\varphi(u_1 v_1 w_1)}}.$$

5. En particulier, on aura pour l'angle de AB avec AC

$$\sin A = \frac{\eta\zeta' - \zeta\eta'}{\sqrt{\eta^2 + \eta'^2}\sqrt{\zeta^2 + \zeta'^2}},$$

$$\cos A = \frac{\eta\zeta + \eta'\zeta'}{\sqrt{\eta^2 + \eta'^2}\sqrt{\zeta^2 + \zeta'^2}},$$

et pour les angles B et C des formules analogues. Il y a en réalité indétermination relativement aux signes à mettre devant les radicaux; mais il faut les prendre tous avec le même signe si l'on veut que ABC représentent les angles intérieurs du triangle, c'est-à-dire satisfassent à la relation

$$A + B + C = \pi.$$

Nous poserons

$$\sqrt{\xi^2 + \xi'^2} = \lambda, \qquad \sqrt{\eta^2 + \eta'^2} = \mu, \qquad \sqrt{\zeta^2 + \zeta'^2} = \nu.$$

λ, μ, ν étant trois nombres appelés *paramètres de référence*. On peut alors écrire l'équation de la droite de l'infini sous la forme

$$\frac{x \sin A}{\lambda} + \frac{y \sin B}{\mu} + \frac{z \sin C}{\nu} = 0,$$

et celle des points cycliques

$$\begin{aligned}
&\varphi(uvw) \\
&= \lambda^2 u^2 + \mu^2 v^2 + \nu^2 w^2 - 2\mu\nu \cos A\, vw \\
&\qquad - 2\nu\lambda \cos B\, wu - 2\lambda\mu \cos C\, uv = 0.
\end{aligned}$$

La formule qui donne l'angle de deux droites se réduit, par l'introduction de A, B, C, à

$$\operatorname{tang} V = \frac{\left\{\begin{array}{c} (v_0 w_1 - w_0 v_1)\mu\nu \sin A + (w_0 u_1 - u_0 w_1) \\ \nu\lambda \sin B + (u_0 v_1 - v_0 u_1)\lambda\mu \sin C \end{array}\right\}}{\frac{1}{2}(u_0 \varphi'_{u_1} + v_0 \varphi'_{v_1} + w_0 \varphi'_{w_1})}.$$

On voit que tang V s'annule lorsque le point de rencontre des deux droites se trouve sur la droite fondamentale et devient infini lorsque les deux droites sont conjuguées par rapport aux points fondamentaux.

DES DISTANCES.

6. Dans le cas où la conique fondamentale du plan ne se réduit pas à une droite double, au point de vue ponctuel, on peut définir la distance de deux points comme une fonction du rapport anharmonique formé par les deux points et les points de rencontre de la droite qui les joint avec la conique. M. Klein a donné les formules générales et celles qui s'en déduisent dans le cas limite où cette conique dégénère en une droite double; il reste alors une indéterminée arbitraire, qui est, en somme, l'unité de longueur. On peut définir la distance de deux points A, B comme le rapport anharmonique (A, C, B, A′), C étant le point de rencontre de AB avec la droite fondamentale et A′ un point tel que le segment AA′ soit égal à l'unité choisie, mais je préfère m'appuyer sur la théorie des cercles.

7. Un cercle est une conique bitangente à la conique formée par les deux points fondamentaux; son centre est le pôle de contact; son équation est de la forme

$$R^2\varphi(uvw)D(x_0y_0z_0)^2-(ux_0+vy_0+wz_0)^2=0,$$

en désignant par $D(x,y,z)$ le premier membre de l'équation de la droite fondamentale avec un coefficient arbitraire K

$$D(x,y,z)=K\left(\frac{x\sin A}{\lambda}+\frac{y\sin B}{\mu}+\frac{z\sin C}{\nu}\right).$$

On voit que l'équation est homogène, par rapport à u, v, w, à λ, μ, ν et aux coordonnées x_0, y_0, z_0 du centre. Nous dirons, par définition, que R est le rayon du cercle et que la distance du centre à un point de la courbe est constante et égale à R.

Si nous appelons *droites perpendiculaires* deux droites conjuguées par rapport aux points fondamentaux, et *distance d'un point à une droite* sa distance au pied de la perpendiculaire abaissée sur la droite, nous voyons, d'après la théorie des coniques bitangentes, que tout rayon d'un cercle est perpendiculaire à la tangente à l'extrémité, et que le centre d'un cercle est à une distance constante et égale à R de ses tangentes.

La distance d'un point à une droite sera, d'après cela,

$$d = \pm \frac{ux_0 + vy_0 + wz_0}{D(x_0, y_0, z_0)\sqrt{\varphi(u, v, w)}}.$$

La distance de deux points s'obtiendra en cherchant la distance de l'un d'eux à la perpendiculaire menée par l'autre à la droite qui les joint, ou bien se déduira de l'équation ponctuelle des cercles que l'on peut former en partant de l'équation tangentielle précédente.

Il reste à justifier la définition adoptée pour la distance. Je remarque d'abord que le lieu des centres des cercles de rayon R tangent à une droite (x, v, w) se compose de deux droites parallèles à la première

$$ux + vy + wz \pm R\sqrt{\varphi(u, v, w)}\,D(x, y, z) = 0,$$

puisqu'elles vont la rencontrer sur la droite fondamentale. Ensuite, si l'on prend un point x, y, z sur la première droite

$$ux + vy + wz = 0,$$

et si l'on cherche sa distance à l'une des parallèles précédentes, on constate qu'elle est égale à $\pm$ R.

Donc deux parallèles sont partout également distantes et la valeur absolue de la longueur d'un segment est indépendante du sens suivant lequel est décrit ce segment.

Je vais enfin montrer que si l'on prend à partir d'un point A, sur une droite fixe, des segments AB et AB′ égaux à R et R′, et si C est le point de rencontre de ABB′ avec la droite fondamentale, le rapport anharmonique

$$(\mathrm{ACBB'}) = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB'}} : \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CB'}}$$

est égal à $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R'}}$.

B et B′ sont les centres de deux cercles tangents en A à la perpendiculaire à AB, et ayant pour rayon R et R′; si

$$ux + vy + wz = 0$$

est l'équation de cette perpendiculaire, les points B et B′ sont sur les droites

$$ux + vy + wz + \mathrm{R}\sqrt{\varphi(u, v, w)}\,\mathrm{D}(x, y, z) = 0,$$
$$ux + vy + wz + \mathrm{R'}\sqrt{\varphi(u, v, w)}\,\mathrm{D}(x, y, z) = 0,$$

et le rapport anharmonique de ces droites et de la droite fondamentale est bien égal à $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R'}}$, ce qui démontre la proposition. On retombe ainsi sur la définition de la distance indiquée au n° 6.

8. Je vais appliquer les résultats précédents au triangle de référence lui-même. Les distances du point x_0, y_0, z_0 aux trois côtés sont respectivement

$$\frac{x_0}{\lambda}\,\frac{1}{\mathrm{D}(x_0, y_0, z_0)}, \quad \frac{y_0}{\mu}\,\frac{1}{\mathrm{D}(x_0, y_0, z_0)}, \quad \frac{z_0}{\nu}\,\frac{1}{\mathrm{D}(x_0, y_0, z_0)}.$$

De même les distances des trois sommets à une droite (u, v, w) sont respectivement

$$\frac{\lambda u}{\mathrm{K}\sin\mathrm{A}\sqrt{\varphi(u, v, w)}}, \quad \frac{\mu v}{\mathrm{K}\sin\mathrm{B}\sqrt{\varphi(u, v, w)}}, \quad \frac{\nu w}{\mathrm{K}\sin\mathrm{C}\sqrt{\varphi(u, v, w)}}.$$

Les coordonnées d'un point et celles d'une droite, que nous avons définies au n° 2, indépendamment de la notion de points fondamentaux et de droite fondamentale du plan, trouvent ainsi leur interprétation dans les distances du point aux côtés du triangle, affectées des coefficients λ, μ, ν, et dans celles des distances de la droite aux trois sommets, affectées des coefficients $\frac{\sin A}{\lambda}$, $\frac{\sin B}{\mu}$, $\frac{\sin C}{\nu}$. En particulier, les hauteurs du triangle sont égales à

$$\frac{1}{K \sin A}, \quad \frac{1}{K \sin B}, \quad \frac{1}{K \sin C},$$

ce qui fixe l'unité de longueur en fonction des éléments du triangle; si l'on veut par exemple que les côtés soient représentés par a, b, c, on prendra

$$K = \frac{4R^2}{abc} = \frac{R}{S},$$

R étant le rayon du cercle circonscrit et S la surface.

Le système ordinairement employé est celui dans lequel $\lambda = \mu = \nu = 1$, et $D(x_0, y_0, z_0) = 1$; x_0, y_0, z_0 sont alors égales aux distances du point dont elles sont les coordonnées, aux trois côtés du triangle.

9. Je terminerai par la remarque suivante : La polaire d'un point (x, y, z), par rapport au triangle considéré comme cubique, a pour coordonnées $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, $w = \frac{1}{z}$. La transformée de cette droite par polaires réciproques, par rapport à la conique

$$\lambda^2 u^2 + \mu^2 v^2 + \nu^2 w^2 = 0,$$

est le point

$$x' = \frac{\lambda^2}{x}, \qquad y' = \frac{\mu^2}{y}, \quad z' = \frac{\nu^2}{z}.$$

Ces formules définissent une transformation de Cremona particulière, ayant les sommets du triangle comme points fondamentaux, et connue sous le nom de *transformation par points inverses*.

Comme

$$\lambda^2 = (\xi + i\xi')(\xi - i\xi'),$$
$$\mu^2 = (\eta + i\eta')(\eta - i\eta'),$$
$$\nu^2 = (\zeta + i\zeta')(\zeta - i\zeta'),$$

la transformation change les points cycliques l'un dans l'autre. Elle fait correspondre à la droite de l'infini le cercle circonscrit au triangle, de sorte que l'on obtient immédiatement l'équation de ce cercle, qui est

$$\frac{\lambda \sin A}{x} + \frac{\mu \sin B}{y} + \frac{\nu \sin C}{z} = 0,$$

et l'équation ponctuelle générale des cercles est

$$\lambda \sin A\, yz + \mu \sin B\, zx + \nu \sin C\, xy$$
$$+ K(\alpha x + \beta y + \gamma z)\left(\frac{x \sin A}{\lambda} + \frac{y \sin B}{\mu} + \frac{z \sin C}{\nu}\right) = 0.$$