H. Laurent

Démonstration simple des formules qui servent au calcul des tables de logarithmes sinus

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 119-120

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__119_1>

DÉMONSTRATION SIMPLE DES FORMULES QUI SERVENT AU CALCUL DES TABLES DE LOGARITHMES SINUS;

PAR M. H. LAURENT.

La fonction

$$\sin x - x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

s'annule pour $x = 0, \pm\pi, \ldots, \pm n\pi$, et il est naturel de poser

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sin x - x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\\ &\quad = \mathrm{A}x^2\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),\end{aligned}\right.$$

car le premier membre de cette équation, divisé par x, s'annule encore pour $x = 0$. Si l'on considère alors la fonction

$$\begin{aligned}&\sin z - z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\\ &\qquad - \mathrm{A}z^2\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),\end{aligned}$$

où A est donné par la formule (1), on voit que cette fonction s'annulera pour les $2n+1$ valeurs $0, \pm\pi, \ldots, \pm n\pi$ de z et, en outre, en vertu de (1) pour $z = x$, j'ajoute que $z = 0$ est une racine double : donc la dérivée d'ordre $2n+2$ de la fonction considérée s'annulera pour une valeur comprise entre $-n\pi$ et $+n\pi$ si l'on suppose x compris entre ces limites. Or cette dérivée est

$$\pm \sin z - A\,\frac{1.2.3\ldots(2n+2)}{\pi^2\,2\pi^2\ldots n^2\pi^2},$$

et il en résulte que la valeur absolue de A est moindre que

$$\frac{(1.2.3\ldots n)^2\pi^{2n}}{1.2.3\ldots(2n-z)}$$

ou

$$\frac{\pi^2}{n+1}\,\frac{2\pi^2}{n+2}\cdots\frac{n\pi^2}{2n}\,\frac{1}{(2n+1)(2n+2)};$$

cette quantité a manifestement pour limite zéro pour $n=\infty$: on peut donc écrire

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)+\varepsilon,$$

ε ayant pour limite zéro quand $n=\infty$; on a donc

$$\log\sin x = \log x + \log\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)+\ldots+\log\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)+\ldots.$$

On démontrerait avec la même facilité la formule

$$\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\ldots+\left(1-\frac{4x^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)+\varepsilon,$$

où ε tend vers zéro avec n.