

H. LAURENT

**Démonstration simple des formules
qui servent au calcul des tables de
logarithmes sinus**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 11
(1892), p. 119-120

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__119_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**DÉMONSTRATION SIMPLE DES FORMULES QUI SERVENT
AU CALCUL DES TABLES DE LOGARITHMES SINUS;**

PAR M. H. LAURENT.

La fonction

$$\sin x - x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

s'annule pour $x = 0, \pm\pi, \dots, \pm n\pi$, et il est naturel de poser

$$(1) \quad \begin{cases} \sin x - x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \\ = Ax^2 \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \end{cases}$$

car le premier membre de cette équation, divisé par x , s'annule encore pour $x = 0$. Si l'on considère alors la fonction

$$\begin{aligned} \sin z - z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \\ - Az^2 \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), \end{aligned}$$

où A est donné par la formule (1), on voit que cette fonction s'annulera pour les $2n + 1$ valeurs $0, \pm\pi, \dots, \pm n\pi$ de z et, en outre, en vertu de (1) pour $z = x$, j'ajoute que $z = 0$ est une racine double : donc la dérivée d'ordre $2n + 2$ de la fonction considérée s'annulera pour une valeur comprise entre $-n\pi$ et $+n\pi$ si l'on

suppose x compris entre ces limites. Or cette dérivée est

$$\pm \sin z - \Lambda \frac{1.2.3\dots(2n+2)}{\pi^2 2\pi^2 \dots n^2 \pi^2},$$

et il en résulte que la valeur absolue de Λ est moindre que

$$\frac{(1.2.3\dots n)^2 \pi^{2n}}{1.2.3\dots(2n-2)}$$

ou

$$\frac{\pi^2}{n+1} \frac{2\pi^2}{n+2} \dots \frac{n\pi^2}{2n} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)};$$

cette quantité a manifestement pour limite zéro pour $n = \infty$: on peut donc écrire

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) + \varepsilon,$$

ε ayant pour limite zéro quand $n = \infty$; on a donc

$$\log \sin x = \log x + \log \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + \dots + \log \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) + \dots$$

On démontrerait avec la même facilité la formule

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right) \dots + \left(1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2 \pi^2}\right) + \varepsilon,$$

où ε tend vers zéro avec n .