NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. APPELL

Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 115-119

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__115_1>

SUR LES COURBES DONT LES TANGENTES APPARTIENNENT A UN COMPLEXE LINÉAIRE;

PAR M. P. APPELL.

Les tangentes de toute cubique gauche appartiennent à un complexe linéaire, comme il est bien connu; pour que les tangentes d'une biquadratique gauche unicursale appartiennent à un complexe linéaire, il faut et il suffit, comme il est également connu, que les expressions des coordonnées d'un point de cette courbe en fonction rationnelle du quatrième degré d'un paramètre λ puissent être amenées à ne pas contenir λ^2.

D'une manière générale, si l'on pose

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda + a_3}{\alpha_0\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda + \alpha_3}, \\ y &= \frac{b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda + b_3}{\alpha_0\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda + \alpha_3}, \\ z &= \frac{c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda + c_3}{\alpha_0\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda + \alpha_3}, \end{aligned}\right.$$

les lettres a_k, b_k, c_k, α_k désignant des constantes et n un nombre quelconque, la courbe décrite par x, y, z, quand λ varie, est telle que ses tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Cette courbe donne les cubiques et les biquadratiques dont il est question plus haut, si l'on suppose $n = 3$ ou $n = 4$.

En résolvant les équations (1) par rapport à λ^n, λ^{n-1}, λ, on a

$$(2)\qquad \frac{X}{\lambda^n} = \frac{Y}{\lambda^{n-1}} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1},$$

X, Y, Z, T étant des expressions linéaires en x, y, z, que nous prendrons comme coordonnées tétraédriques d'un point. Les équations (2) donnent la relation

$$YZ - TX = 0,$$

qui montre que la courbe est sur une surface du second ordre. Quand n est entier, les génératrices de l'un des systèmes rencontrent la courbe en un point, celles de l'autre en $(n-1)$ points.

Pour que le plan

$$(3) \qquad AX + BY + CZ + DT = 0$$

soit osculateur à la courbe au point

$$\frac{X_0}{\lambda_0^n} = \frac{Y_0}{\lambda_0^{n-1}} = \frac{Z_0}{\lambda_0} = \frac{T_0}{1}$$

de paramètre λ_0, il faut et il suffit que l'équation

$$A\lambda^n + B\lambda^{n-1} + C\lambda + D = 0$$

admette la racine triple λ_0; ce qui s'exprime par les trois conditions

$$\begin{aligned} A\lambda_0^n + B\lambda_0^{n-1} + C\lambda_0 + D &= 0, \\ nA\lambda_0^{n-1} + (n-1)B\lambda_0^{n-2} + C &= 0, \\ nA\lambda_0^{n-2} + (n-2)B\lambda_0^{n-3} &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{B}{A} = -\frac{n}{n-2}\lambda_0, \qquad \frac{C}{A} = \frac{n}{n-2}\lambda_0^{n-1}, \qquad \frac{D}{A} = -\lambda_0^n;$$

le plan osculateur a donc pour équation

$$X - \frac{n}{n-2}\lambda_0 Y + \frac{n}{n-2}\lambda_0^{n-1} Z - \lambda_0^n T = 0,$$

ou bien

$$XT_0 - TX_0 + \frac{n}{n-2}(ZY_0 - YZ_0) = 0.$$

Cette dernière équation est celle du plan focal d'un point (X_0, Y_0, Z_0, T_0) dans un complexe linéaire; ce qui démontre la propriété annoncée.

On vérifiera sans peine qu'aux deux points $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$ le plan osculateur et la tangente ont, en général, avec la courbe des contacts d'un ordre plus élevé qu'en un point ordinaire.

En faisant, dans les équations (1), tendre n vers zéro, après avoir posé

$$a_0 = \frac{a'_0}{n}, \qquad a_3 = a'_3 - \frac{a'_0}{n},$$

$$\alpha_0 = \frac{\alpha'_0}{n}, \qquad \alpha_3 = \alpha'_3 - \frac{\alpha'_0}{n},$$

$$\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on trouve la courbe

$$x = \frac{a'_0 \log\lambda + a_1\lambda^{-1} + a^2\lambda + a'_3}{\alpha'_0 \log\lambda + \alpha_1\lambda^{-1} + \alpha_2\lambda + \alpha'_3}, \qquad \ldots,$$

qui est la transformée homographique d'une hélice tracée sur un cylindre de révolution; en effet, les coordonnées x', y', z' d'un point de l'hélice sont données par

$$x' = \mathrm{R}\cos\theta, \qquad y' = \mathrm{R}\sin\theta, \qquad z' = k\theta,$$

d'où, en posant $e^{i\theta} = \lambda$,

$$x' + y'i = \mathrm{R}\lambda, \qquad x' - y'i = \mathrm{R}\lambda^{-1}, \qquad iz' = k\log\lambda.$$

On obtient, par un procédé analogue, une courbe limite pour $n = 2$ et $n = 1$.

Remarque. — Considérons la courbe qui, en coordonnées tétraédriques, a des équations de la forme

$$(4) \qquad \frac{X}{t^\alpha} = \frac{Y}{t^\beta} = \frac{Z}{t^\gamma} = \frac{T}{1},$$

t étant un paramètre variable, α, β, γ des constantes; pour que les tangentes de cette courbe appartiennent à un complexe linéaire, il faut et il suffit, comme on le vérifiera, que l'un des exposants α, β, γ soit égal à la somme des deux autres : par exemple

$$\alpha = \beta + \gamma.$$

En posant alors $t^\gamma = \lambda$, $\frac{\alpha}{\gamma} = n$, on a

$$\frac{X}{\lambda^n} = \frac{Y}{\lambda^{n-1}} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1};$$

c'est la courbe ci-dessus.

Pour exprimer que les tangentes à la courbe (4) appartiennent à un complexe de droites du premier ordre, il suffit d'exprimer que la transformée homographique de cette courbe

$$x = t^\alpha, \qquad y = t^\beta, \qquad z = t^\gamma \tag{5}$$

possède la même propriété, c'est-à-dire que x, y, z vérifient l'équation

$$\left\{\begin{aligned} &a\,dx + b\,dy + c\,dz + p(y\,dz - z\,dy) \\ &\qquad + q(z\,dx - x\,dz) + r(x\,dy - y\,dx) = 0, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

où a, b, c, p, q, r sont des constantes convenablement déterminées, non nulles toutes à la fois. En substituant dans cette équation les expressions (5), on obtient une condition qui doit être une identité en t : il faut que dans cette identité deux termes en t au moins aient le même exposant, car, autrement, il ne pourrait se faire aucune réduction. En exprimant que deux de ces exposants sont égaux et écartant le cas où deux des nombres α, β, γ sont égaux, cas qui donne des *courbes planes*, on trouvera que l'un des nombres α, β, γ doit être égal à la somme des deux autres.