Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 103-113

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__103_1>

BIBLIOGRAPHIE.

Mémoire sur l'interprétation des symboles *dits imaginaires*, ou Théorie des acceptions, avec ses applications en Algèbre et en Géométrie. — Extrait principalement des travaux inédits de feu l'*abbé George*, par *J. Évrard*, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées en retraite. Paris, Baudry et Cie, 1891 (1).

I. *Représentation linéaire des quantités et expression analytique correspondante. — Module, acception. — Conséquences.* — Une quantité positive, exprimée arithmétiquement par un nombre, entier ou fractionnaire, d'unités de même espèce et de nature quelconque (longueurs, surfaces, volumes, poids, forces, vitesses, etc.,) peut toujours être représentée graphiquement par une longueur OA déterminée d'après une échelle convenue et portée à partir d'un point O sur une droite indéfinie OX.

Si la même quantité doit être prise négativement, il est

(1) L'abbé George a déjà été nommé dans les *Nouvelles Annales*. Dès 1845, M. O. Terquem annonçait (t. IV, p. 616) l'insertion à bref délai d'une lettre qui n'a pas été publiée pour des motifs étrangers à la Science (Mémoire de M. Évrard, p. 223). Nous avons voulu réaliser l'intention de notre prédécesseur en laissant à M. Évrard le soin de faire lui-même une analyse rapide, mais substantielle, du Mémoire dans lequel ce savant ingénieur a entrepris de donner une forme définitive au développement des idées de l'abbé George.

E. R.

admis que sa représentation graphique devra être portée en sens contraire à partir de O, en OA′ vers X′, et que OA et OA′ auront respectivement pour expression analytique, en appelant A le nombre d'unités considéré,

$$OA = +A \qquad \text{et} \qquad OA' = -A,$$

ou

$$OA = A(+1) \qquad \text{et} \qquad OA' = A(-1),$$

c'est-à-dire que les directions positive et négative sont respectivement caractérisées par les coefficients $(+1)$ et (-1).

A cause de $[(+1) = (-1)^0]$ et $[(-1) = (-1)^1]$, ces deux coefficients ne sont que les valeurs correspondant à $\varphi = 0$ et $\varphi = 1$ de l'exponentielle $(-1)^\varphi$. Si l'on suppose que l'exposant φ aille en croissant par degrés continus de 0 à 1, en prenant les valeurs successives d'un arc de cercle de centre O et de rayon OA, mesuré à partir de A et exprimé en fonction de la demi-circonférence prise pour unité, le rayon du cercle représenté par OM correspondra à la valeur de l'exposant φ représentée par l'arc AM, et l'on pourra écrire

$$OM = A(-1)^\varphi$$

pour expression analytique d'une quantité représentée suivant l'une quelconque des directions partant du point O et comprise avec OX dans un plan unique, que l'on qualifiera d'*horizontal*, pour abréger, sans que cela implique rien quant à sa situation absolue.

On aura en particulier, pour la quantité représentée suivant la direction OP, symétrique de OM par rapport à OA,

$$OP = A(-1)^{2-\varphi} = A(-1)^2(-1)^{-\varphi} = A(-1)^{-\varphi}.$$

Mais

$$[\varphi = \varphi(+1) = \varphi(-1)^0],$$

et

$$[-\varphi = \varphi(-1) = \varphi(-1)^1].$$

On peut donc écrire aussi

$$OM = A(-1)^{\varphi(-1)^0}, \qquad OP = A(-1)^{\varphi(-1)^1},$$

c'est-à-dire que les deux coefficients de A, dans OM et OP, ne sont que les valeurs correspondant à $\varphi' = 0$ et $\varphi' = 1$, de la double exponentielle $(-1)^{\varphi(-1)^{\varphi'}}$.

Si donc on suppose que, l'angle MOX demeurant constant, le rayon OM sorte du plan horizontal et décrive autour de OX un cône à base circulaire, il est clair que, quand OM sera parvenu en OM′ dans un plan M′OX incliné de φ' sur le plan horizontal, le point M aura décrit un arc de même amplitude, mesuré à partir de M sur la circonférence de la base du cône, et exprimé en fonction de la demi-circonférence MM′P prise pour unité. On aura donc, pour l'expression analytique de OM′,

$$\mathrm{OM}' = \mathrm{A}\,(-1)^{\varphi(-1)^{\varphi'}}.$$

Il est à la fois plus commode et plus conforme à l'usage d'évaluer les inclinaisons en prenant pour unité le quadrant, correspondant à l'angle droit, plutôt que la demi-circonférence. Désignant donc par α et α' des nombres ayant avec l'unité le même rapport que les arcs AM et MM′ avec le quadrant, on aura d'abord

$$\mathrm{OM}' = \mathrm{A}\,(-1)^{\frac{\alpha}{2}(-1)^{\frac{\alpha'}{2}}}.$$

puisqu'on doit avoir le même résultat pour ($\varphi = \varphi' = 1$) ou pour ($\alpha = \alpha' = 2$).

Afin d'éviter l'aspect fractionnaire des exposants, ayant égard à l'équivalence algébrique $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$, on écrira définitivement

$$(\mathrm{D}) \qquad \mathrm{OM}' = \mathrm{A}\sqrt{-1}^{\,\alpha\sqrt{-1}^{\,\alpha'}}$$

pour l'expression analytique d'une quantité dont la représentation linéaire serait définie par des valeurs déterminées de A, α et α'.

Cette expression se compose de deux éléments :

1° Le *module* A, correspondant à la *grandeur;*

2° L'*acception* $\left(\sqrt{-1}^{\,\alpha\sqrt{-1}^{\,\alpha'}}\right)$ correspondant à la *direction* ou à l'*orientation* de la représentation linéaire de la quantité considérée.

Pour $\alpha' = 0$, l'acception se réduit à $\sqrt{-1}^{\,\alpha}$ et sera dite *acception simple.*

Pour chaque valeur de α', l'acception qui peut s'écrire $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\,\alpha'}}\right)^{\alpha}$ sera dite *acception réflexe.*

$(\sqrt{-1})$ et $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ sont les *bases* de l'acception *simple* et de l'acception *réflexe*.

Le *symbole général d'acception* est l'expression *algébrique* des racines de l'unité (*Mémoire*, n° 4). Il se réduit notamment à :

± 1 pour l'axe des x..........	par ($\alpha' = 0$, $\alpha = 0$ ou 2);
$\pm\sqrt{-1}$ pour l'axe des y, ou pour la perpendicularité *simple*...	par ($\alpha' = 0$, $\alpha = 1$ ou 3);
$\pm\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ pour l'axe des z, ou pour la perpendicularité *double*....................	par ($\alpha' = 1$, $\alpha = 1$ ou 3);

Les propriétés *géométriques* des symboles $(\sqrt{-1})$ et $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ n'apparaissent, on le voit, que comme *conséquences* de valeurs particulières attribuées aux variables α et α'. Elles ne sont pas *préjugées a priori*.

Le symbole $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ dérive d'ailleurs du symbole général. Il n'est nullement engendré par l'*élévation de* $(\sqrt{-1})$ *à la puissance* $(\sqrt{-1})$, et suivant l'expression d'Argand (*Argand*, réédité par *Houël*, p. 95), il est aussi *hétérogène* par rapport à $(\sqrt{-1})$ que $(\sqrt{-1})$ par rapport à $(+1)$.

Toutes les quantités comprises dans la forme générale $A\left(\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ étant susceptibles de représentation linéaire, sont donc aussi *visibles*, aussi *tangibles*, par conséquent aussi *réelles* et aussi *peu imaginaires* les unes que les autres.

Mais on montrera (*Mémoire*, n^{os} 10, 71 à 74) que toute fonction de $\sqrt{-1}$ est réductible à cette forme. Sous le bénéfice de cette vérification *a posteriori*, on peut dire avec l'abbé George : *Il n'y a pas de quantités imaginaires*.

Dans les formules algébriques ou trigonométriques ordinaires, les arcs sont exprimés en fonction du rayon pris pour unité. Il est facile d'introduire cette hypothèse dans la notation du symbole d'acception. Désignant par a et a' les arcs rectifiés correspondant à α et α', on aura

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{a}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{\pi}, \qquad \frac{\alpha'}{1} = \frac{a'}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a'}{\pi}$$

et, par conséquent, les exponentielles deviendront

$$\sqrt{-1}^{\frac{2a}{\pi}}, \qquad \sqrt{-1}^{\frac{2a}{\pi}\sqrt{-1}^{\frac{2a'}{\pi}}}.$$

On ne recourra à cette forme plus compliquée que dans le cas de rapprochement avec les formules algébriques ou trigonométriques ordinaires.

II. *Calcul des acceptions.* — L'expression (D) ayant été établie algébriquement, les règles ordinaires du calcul algébrique doivent lui être applicables.

Mais la forme du symbole général d'acception, c'est-à-dire la *double exponentielle* $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$, étant nouvelle en Analyse, il est à prévoir qu'en l'introduisant dans le calcul on rencontrera des notions ou propositions également nouvelles dont il n'y aura qu'à prendre acte à mesure qu'on les constatera, pour en tenir tel compte que de raison.

Calcul des expressions analytiques considérées comme éléments de sommes. — Composition des droites. — L'opération de la composition géométrique des droites se résume (n° 7) par l équation

$$R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}} = \Sigma A \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$$

qui, pour un contour fermé, se réduira à

$$\Sigma \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = 0.$$

L'élément symbolique $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ se traduit d'ailleurs trigonométriquement (n° 8) par la formule trinôme, élémentaire et fondamentale

$$\text{(F)} \quad \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha\sin\alpha',$$

à l'aide de laquelle la première équation peut se développer (n° 9) et s'écrire

$$\left\{\begin{aligned}&(R\cos\rho - \Sigma A\cos\alpha)\\ &\quad + \sqrt{-1}\,(R\sin\rho\cos\rho' - \Sigma A\sin\alpha\sin\alpha')\\ &\quad + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}(R\sin\rho\sin\rho' - \Sigma A\sin\alpha\sin\alpha') = 0,\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire sous la forme

$$L + M\sqrt{-1} + N\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = 0,$$

impliquant à la fois $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, puisque la projection de la résultante est égale à la somme des projections des composantes sur chacun des trois axes coordonnés.

La relation fondamentale (F) devient (n° 11) pour les directions comprises dans chacun des plans coordonnés :

1° Plan des xy ($z = 0$, $\alpha' = 0$),

$$(f_1) \qquad \sqrt{-1}^{\alpha} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$$

(à rapprocher de la formule d'Euler);

2° Plan des xz ($y = 0$, $\alpha' = 1$),

$$(f_2) \qquad \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha;$$

3° Plan des yz ($x = 0$, $\alpha = 1$),

$$(f_3) \qquad \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha'.$$

Mais (n° 14) la relation (F) peut aussi bien s'écrire

$$\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha} = \cos\alpha + \left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha'\right)\sin\alpha,$$

ou, d'après (f_3)

$$(F') \qquad \left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha} = \cos\alpha + \left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)\sin\alpha.$$

Sous cette forme binôme, on voit que (F′) se déduirait directement de (f_1) en y remplaçant la *base* $\sqrt{-1}$ de l'acception *simple* par la *base* $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ de l'acception *réflexe*.

Si, d'autre part cependant, dans (f_1), on remplace α par $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$, on obtient

$$(F'') \qquad \sqrt{-1}^{\alpha\left(\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)} = \cos\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$$

relation dont le premier membre est identique avec celui de (F).

On est donc ainsi conduit à considérer les arcs ou angles d'expression $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$.

Étude des arcs ou angles prétendus imaginaires. — L'arc $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$, n'étant autre chose que l'arc α transporté du plan horizontal dans le plan d'inclinaison α' par une rotation autour de l'axe des x, est aussi *réel* que α, et ses lignes trigonométriques (n° 16) doivent être identiques avec celles de α comme *grandeur* ou *module*, et n'en différer que par l'*acception*.

Il s'ensuit que les expressions des *modules* des lignes trigonométriques en fonction du *module* de l'arc, telles que les séries de $\sin\alpha$ et de $\cos\alpha$, sont également invariables (n° 17), et que si l'on y remplace α par $(\alpha\sqrt{-1})$, on ne peut obtenir que des résultats dépourvus de sens.

Au contraire, dans l'exponentielle e^{α}, la même substitution conduit à la formule d'Euler. Mais, de cette formule même, on déduit (n° 18) son identité avec l'équation (f_1) des directions dans le plan horizontal, d'où résulte que l'acception *simple*, indépendamment de son expression *exponentielle*, a aussi une expression *logarithmique*, c'est-à-dire qu'on a la double équation

$$\sqrt{-1}^{\alpha} = e^{\alpha\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha.$$

Mais, si dans $\sqrt{-1}^{\alpha}$ et dans $(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)$ on substitue $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ à $\sqrt{-1}$, on obtient l'équation (F'). Il est donc légitime de faire la même substitution dans $e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}}$ et, par conséquent, d'écrire

$$\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha} = e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}}.$$

Pour $\alpha = \alpha' = 1$, cette équation se réduit à

$$\text{(E)} \qquad \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}},$$

relation qui est en désaccord avec celle qui a cours dans l'enseignement, c'est-à-dire avec

$$\text{(E')} \qquad \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \left(e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,208\right).$$

L'équivalence (E), cependant, ne soulève pas (n° **21**) les mêmes contradictions que (E′). Celle-ci d'ailleurs se rectifie (*Mémoire,* n° 25, II) par l'application d'une nouvelle règle à laquelle conduit la discussion de ces contradictions, et qui peut se résumer brièvement comme suit (n° 23) :

Dans la représentation linéaire de $(L + M\sqrt{-1})$, M *est perpendiculaire à* L. *Si* M *devient* $(N + P\sqrt{-1})$ *avec* P *perpendiculaire à* N, *les deux éléments* (N *et* P) *de* M *doivent rester perpendiculaires à* L, *c'est-à-dire que* L *est perpendiculaire au plan de* N *et de* P, *en même temps que* P *est perpendiculaire au plan de* L *et de* N. *De sorte qae*

$$L + (M = N + P\sqrt{-1})\sqrt{-1}$$

doit s'écrire

$$\left(M + N\sqrt{-1} + P\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right),$$

au lieu de

$$\left(L + N\sqrt{-1} - P\right)$$

que donnerait la multiplication algébrique ordinaire.

Calcul des expressions analytiques considérées comme éléments de produits. — Composition des arcs. — On constate d'abord (n° 31) que les produits des acceptions de même réflexité obéissent à la règle générale de la multiplication algébrique, c'est-à-dire qu'ils sont indépendants de l'ordre des facteurs. Ces produits correspondent à la somme d'arcs mesurés sur la même circonference.

En poursuivant (n° 32) par la recherche du produit de deux facteurs orthogonaux, l'un d'acception simple $\sqrt{-1}^{a}$, l'autre $\sqrt{-1}^{a'\sqrt{-1}}$, on est conduit à une seconde forme de l'acception réflexe $\left(\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}}\right)$, et (n° 33) à l'équivalence

$$\left(\sqrt{-1}^{a+\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right),$$

qui est la traduction algébrique de cette proposition qu'on arrive au pôle géographique par tous les méridiens.

Il s'ensuit (n° 34), pour la multiplication par $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ d'un binôme de forme $(M + N\sqrt{-1})$, une règle nouvelle qui se formule ainsi

$$(M + N\sqrt{-1})\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \sqrt{M^2 + N^2}\,\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}.$$

En poursuivant jusqu'au cas le plus général de deux, trois, et enfin (n° 39) d'un nombre quelconque de facteurs de réflexité différente, on arrive à cette conséquence que les produits varient avec l'ordre de la multiplication, ce qui s'explique par le fait que la multiplication de facteurs de cette espèce est la traduction algébrique de l'opération géométrique de la *composition des arcs,* et que cette composition, contrairement à celle des droites, admet plusieurs résultantes qui varient avec l'ordre de l'introduction des facteurs.

D'où résulte (n° 41) que l'équation générale $\left[\Sigma\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}=0\right]$ qui symbolise cette opération, laquelle peut aussi s'appeler *addition sphérique,* doit être distinguée par un signe particulier, par exemple l'emploi des crochets [...], spécifiant que cette équation n'est pas une équation algébrique de nature ordinaire, et que l'ordre des termes n'y peut être indifféremment interverti.

III. *Méthode des acceptions. Conclusions.* — Du calcul des acceptions résulte naturellement une méthode générale pour la mise en équation et la résolution des questions de Géométrie analytique, par application des principes de la composition des droites et de la composition des arcs, en développant les équations de forme $\left(\Sigma\alpha\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}=0\right)$ qui caractérisent les contours rectilignes de la figure, et les équations de forme $\left[\Sigma\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}=0\right]$ qui symbolisent ses angles trièdres et polyèdres, dans le cas où ses éléments rectilignes ne sont pas tous situés dans le même plan.

Au point de vue pratique, cette méthode n'a qu'une faible importance, puisqu'on remarque (n° 88) que l'emploi direct des deux trigonométries sera souvent plus expéditif. Mais la concordance des résultats obtenus par l'une ou l'autre voie, constatée sur les nombreux exemples donnés dans le Mémoire, constitue en tout cas une *vérification expérimentale* de la valeur théorique de la méthode, et par conséquent de la théorie même des acceptions.

Or, le but principal de cette théorie, dans la pensée de son auteur, est d'écarter de la Science la notion de l'*imaginaire,* ou la distinction des quantités en *réelles* et *imaginaires,* en y substituant la *distinction* des *quantités,* toujours *réelles,* par l'*acception* qui affecte le *module,* et qui spécifie la direction de leur représentation linéaire. Si la théorie est vraie, ce but est pleinement atteint, en même temps (n° 89) qu'il en résulte la rectification d'un grand nombre d'erreurs, de contradictions ou de paradoxes analytiques qui ont été successivement signalés dans le Mémoire.

Parmi ces erreurs, on a particulièrement relevé (n° 21) l'étrange équivalence (E′) déduite de la formule d'Euler, et qui repose sur *l'élévation d'une quantité à la puissance* $\sqrt{-1}$, opération évidemment dépourvue de sens. m étant quelconque (n° 29), on ne saurait dire ce que c'est que $m^{\sqrt{-1}}$; encore moins écrire avec conviction que

$$\left(m^{\sqrt{-1}}\right)^{\sqrt{-1}} = m^{\sqrt{-1}\sqrt{-1}} m^{-1} = \frac{1}{m}.$$

Si cependant la relation (E′), ou $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \left[e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,208\right]$ était vraie, tout le calcul des acceptions et la méthode qui s'ensuit seraient renversés, puisque tout développement

$$\left(L + M\sqrt{-1} + N\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$$

se réduirait à

$$(L + 0,208 N) + M\sqrt{-1}.$$

Mais calcul et méthode sont *vérifiés expérimentalement*, comme on vient de le dire.

On doit donc tenir pour condamnée une relation qui prend d'ailleurs un aspect quasi-grotesque quand on la traduit en termes concrets; car il en résulterait que

$$\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{m} = 208 \text{ millimètres},$$
$$\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{kg} = 208 \text{ grammes},$$
$$\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{fr} = 21 \text{ centimes}.$$

On doit tenir au contraire pour démontrée la proposition que « $L + M\sqrt{-1} + N\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = 0$ *implique séparément* $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ », confirmée d'ailleurs (n° 10) par son analogue dans la théorie des quaternions : « A, B, C *étant trois vecteurs de direction différente et non compris dans un même plan, la relation* $aA + bB + cC = 0$ *implique séparément* : $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. »

On a fait ressortir (n° 39) une autre concordance des deux théories. D'une part « *le produit d'acceptions de réflexité différente, correspondant à la résultante d'une composition d'arcs, varie avec l'ordre d'introduction des facteurs ou des arcs considérés.* » D'autre part « *la multiplication des vecteurs non coplanaires ou l'addition sphérique n'est pas commutative* ».

Ainsi, comme conception, et au point de vue *théorique*, les méthodes des *quaternions* et des *acceptions* n'ont rien qui s'exclue, au contraire.

Quant aux ressources *pratiques* que peut offrir l'emploi des méthodes des quaternions et des équipollences quand on se les est rendues familières, nous nous sommes abstenu (Préface, p. xx) de toute appréciation à cet égard, en nous bornant à faire ressortir le *caractère artificiel* de l'algèbre des équipollences et des quaternions.