Exercices

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. S1-S52 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__S1_0>

EXERCICES.

Pour satisfaire au désir exprimé par plusieurs de nos abonnés, nous consacrerons désormais régulièrement dans chaque numéro quelques pages à l'énoncé de questions proposées et à leur solution. Toutefois, comme il importe beaucoup, dans l'intérêt du Journal, que ce nombre de pages soit assez restreint pour ne pas nuire à la publication des Mémoires originaux, nous prions nos Correspondants de vouloir bien rédiger leurs solutions avec une extrême sobriété, en supprimant les développements qui ne présentent pas de difficulté sérieuse.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1595. Les rayons de courbure aux extrémités d'une corde quelconque d'une conique sont proportionnels aux cubes des distances de ces points au pôle de la corde. (A. Demoulin.)

1596. Étant donnés, dans un plan, une courbe générale de $n^{\text{ième}}$ classe et un point, il existe $2n(n+1)$ paraboles, ayant un même paramètre, qui ont pour foyer le point donné et sont tangentes à la courbe donnée.

La somme des angles que font, avec une direction quelconque Δ du plan, les axes de ces paraboles, est égale, à un multiple de π près, au quadruple de la somme des angles que font avec la direction Δ les droites joignant le foyer commun des paraboles aux n foyers de la courbe, augmenté du double de la somme des angles que font avec Δ les $n(n-1)$ directions asymptotiques de cette courbe. (G. Fouret.)

1597. Pierre tire quatre cartes d'un jeu de piquet; il donne les trois premières à Paul et garde la quatrième pour lui. Pierre a gagné si sa carte n'est de la couleur d'aucune des cartes de Paul, ou si, étant de la couleur de l'une ou de plusieurs d'entre elles, elle a une valeur supérieure. La mise de Paul étant de 1^{fr}, quelle doit être celle de Pierre pour que le jeu soit équitable? (E. Rouché.)

1598. Le lieu des centres des hyperboles équilatères osculatrices en chaque point d'une ellipse donnée est une courbe du quatrième ordre qui peut être considérée comme la podaire du centre d'une ellipse concentrique à la première.

(E. BARISIEN.)

1599. Si l'on pose

$$E_1 = \frac{4}{3}\pi(ab + bc + ca),$$

$$R = \frac{2\pi}{15b}[a^2(b-c)^2 + b^2(c-a)^2 + c^2(a-b)^2],$$

et si l'on désigne par E l'aire de l'ellipsoïde dont les demi-axes rangés par ordre de grandeur décroissante sont a, b, c, on a

$$E = E_1 + \frac{R}{c - \theta(a-c)},$$

θ étant un nombre convenablement choisi entre o et 1.

(G. PEANO.)

1600. Soient X'X une droite horizontale indéfinie, A et B deux points pris sur cette droite et C un point pris au-dessous, de manière que sa projection sur X'X tombe entre A et B. n points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dont les masses respectives sont m_1, $m_2, \ldots, m_n$ parcourent la ligne brisée X'ACBX, de telle sorte que leur ordre de succession reste le même et que les projections sur X'X de leurs distances mutuelles restent constantes. On demande de trouver : 1° le lieu du centre de gravité de ce système de points; 2° la position du système pour laquelle le centre de gravité est le plus bas. (E. ROUCHÉ.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1594.

On donne un triangle abc. On trace une circonférence qui passe par a, elle coupe ab en c' et ac en b'. On trace une circonférence qui passe par b et c', elle coupe bc en a' et la première circonférence en i : les points i, a', c, b' sont sur une même circonférence.

On prend un point arbitraire O *sur le plan abc. La* *droite* O*a* *coupe en* α *la circonference qui passe par* *a* *La droite* O*b* *coupe en* β *la circonference qui passe par* *b* *Enfin sur la troisieme circonference on a* γ *a sa rencontre avec* O*c*

Demontrer que les points O, α, β, γ, ι *sont sur une meme circonference* (MANNHEIM)

SOLUTION

Par MM E LEMOINE A ANDERSON, professeur a Galway (Irlande), J CHAPRON, caporal au 26e de ligne BAUDIAU, eleve au lycee de Rouen, et DE MONTILLE, eleve au lycee Saint Louis

Les points ι, b, a, c etant sur une meme circonference, les angles $\iota b'a$, $\iota c'b$ sont egaux, de meme la situation des points ι, c, b, a' sur une meme circonference entraine l egalite des angles $\iota c'b$, $\iota a c$ Donc les angles $\iota b'a$, $\iota a'c$ sont egaux et par suite les points ι, b, c, a appartiennent a une meme circonference

D ailleurs, les angles Oac et Oca etant respectivement egaux a $\alpha\iota b'$, $\gamma\iota b$, leur somme est egale a l angle $\alpha\iota\gamma$, mais cette somme est egale a l angle αOγ ou a son supplement, donc la circonference qui passe par les trois points O, α, ι passe par γ, et l on demontrerait de meme qu'elle passe par β

N B — Une solution analytique de ce probleme generalise a ete deja donnee (t IX, 3e serie, p 556)

Question 1477

ABC *est un triangle rectangle en* A *D'un point quelconque* M *pris sur le cote* AB *on abaisse sur la hauteur* AH *la perpendiculaire* MP, *par le point* P *on eleve a la droite* CP *la perpendiculaire* PQ *qui coupe* AB *prolonge au point* Q *Demontrer que* AQ = BM (D OCAGNE)

SOLUTION

Par M LEMAIRE, professeur au lycee de Douai

Si l'on mene PL parallele a AB jusqu a sa rencontre L avec AC, on a evidemment MB = PL et il suffit de demontrer l egalite de PL et de AQ Or PL et AP etant deux des hauteurs du triangle CAL, CP est la troisieme hauteur, donc PQ et AL sont paralleles comme perpendiculaires a la meme droite CP, et par suite PL et AQ sont egales comme paralleles comprises entre paralleles

Question 1575.

Les côtés d'un triangle PQR *inscrit à une parabole rencontrent l'axe* AS *aux points* L, M, N, *et l'on prend sur* AS *des points* L', M', N', *tels que*

$$AL.AL' = AM.AM' = AN.AN' = -\overline{AS}^2,$$

A *étant le sommet,* S *le foyer; démontrer par la Géométrie pure que les droites* PL', QM', RN' *se rencontrent sur la courbe.* (R.-W. Genèse.)

SOLUTION

Par M. Servais.

Nous traitons la question plus générale : *Les côtés d'un triangle inscrit à une conique rencontrent une parallèle* AI, *menée d'un point* A *de la courbe à une asymptote, aux points* L, M, N; *on prend sur* AI *des points* L', M', N', *tels que*

$$AL.AL' = AM.AM' = AN.AN' = \pm a^2;$$

les droites PL', QM', RN' *se recontrent sur la courbe.*

Soit S le point où PL' rencontre la courbe, la sécante AI rencontre la courbe et les côtés du quadrilatère PQRS en des couples de points A et I, L et L', M et M'', N et N'' d'une involution; mais le point I est à l'infini, donc A est le point central de cette involution et l'on a

$$AL.AL' = AM.AM'' = AN.AN'' = \pm a^2;$$

ce qui montre que les points M' et M'', N' et N'' coïncident.

Corollaire. — *Les côtés d'un triangle* PQR *inscrit à une hyperbole et la tangente à cette courbe au point* P *rencontrent une asymptote aux points* L, M. N, T; *on a* LM = NT.

Ce corollaire permet de construire la tangente en un point d'une hyperbole donnée par une asymptote et trois points.

Deux tangentes à l'hyperbole et leur corde de contact rencontrent une asymptote aux points T, T', C; *on a* CT = CT'.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1601. Inscrire dans une sphère donnée un polygone dont chaque côté passe par un point donné. (G. TARRY.)

On propose de démontrer la construction suivante du polygone en question.

Inscrivons dans la sphère deux lignes brisées $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{n+1}$, $P B_2 B_3 \ldots B_{n+1}$ dont les côtés passent respectivement par les points donnés $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$, puis la ligne brisée $P C_n C_{n+1} \ldots C_1$ dont les côtés passent par les mêmes points pris dans l'ordre inverse $d_n, d_{n-2}, \ldots, d_1$.

Menons un plan perpendiculaire au diamètre de la sphère qui passe par le point P et désignant par A'_1, A'_{n+1}, B'_{n+1}, C'_1 les intersections de ce plan avec les droites PA_1, PA_{n+1}, PB_{n+1}, PC_1 et par Q les intersections des droites $B'_{n+1} A'_{n+1}$ et $C'_1 A'_1$.

Dans ce plan, construisons le triangle de base $B'_{n+1} C'_1$ dans lequel, 1° le produit des deux autres côtés est égal au produit des segments $B'_{n+1} A'_{n+1}$ et $C'_1 A'_1$; 2° la somme ou la différence des angles à la base est la même que dans le triangle $Q B'_{n+1} C'_1$, suivant que le nombre de points donnés est pair ou impair.

Soit S le sommet de ce triangle.

Une droite PS coupe la sphère au point S_1, sommet d'un polygone $S_1 S_2 S_3 \ldots S_n$ dont les côtés passent respectivement par les points donnés.

Le problème comporte deux solutions. Ces solutions sont toujours réelles lorsque le polygone cherché a un nombre impair de côtés.

1602. Par les sommets A, B, C d'un triangle inscrit dans une conique, on mène à la courbe des tangentes qui rencontrent les côtés opposés en A′, B′, C′; les milieux de AA′, BB′, CC′ sont en ligne droite.

Dans le cas particulier du cercle, cette droite est l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle des neuf points.

(F. FARJON.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1398.

Un cercle roule sur une ellipse. Trouver :

1° *Le lieu des points* M *de contact des tangentes à ce cercle parallèles aux axes de l'ellipse;*

2° *Le lieu des points* S *de rencontre de ces tangentes;*

3° *La quadrature des courbes obtenues.*

(E. Fauquembergue.)

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Soient k le rayon du cercle, α, β les coordonnées de son centre C. Celles des points M et S seront

$$(\mathrm{M}) \qquad [(\alpha+k, \beta), (\alpha, \beta+k), (\alpha-k, \beta), (\alpha, \beta-k)],$$

$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [(\alpha+k, \beta+k), (\alpha-k, \beta+k), \\ (\alpha-k, \beta-k), (\alpha-k, \beta-k)]. \end{array} \right.$$

Le lieu du point C est la courbe parallèle à l'ellipse, nommée aussi *toroïde*, parce qu'elle représente le contour apparent du tore.

Cette courbe est aujourd'hui bien connue; M. Catalan a donné son équation sous la forme très simple

$$(\mathrm{AB}-9\mathrm{C})^2 = 4(\mathrm{A}^2+3\mathrm{B})(\mathrm{B}^2+3\mathrm{AC})$$

avec

$$\mathrm{A} = \alpha^2-\beta^2-a^2-b^2-k^2,$$

$$\mathrm{B} = a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2,$$

$$\mathrm{C} = a^2b^2k^2$$

(*Nouv. Ann.*, p. 533; 1884). Il restera donc à remplacer α et β par les valeurs (M) et (S) pour en déduire les équations des courbes demandées, qui sont, naturellement, autant de toroïdes égales à la première, transportées parallèlement.

L'aire de ces courbes est donc égale à l'aire de la toroïde, et, d'après une étude générale publiée par Crelle dans un

Mémoire sur le parallélisme des lignes et surfaces courbes (*Ann. de Gergonne*, t. XII, p. 1-35; juillet 1821), on reconnaît que l'espace compris entre les courbes parallèles a pour mesure le rectangle qui, ayant pour base la courbe enveloppante (ou enveloppée), aurait pour hauteur la distance entre les deux courbes, moins (ou plus) le cercle qui aurait cette même distance pour rayon (*loc. cit.*, p. 18).

Question 1452.

L'expression

$$8\beta - 3(\alpha^2 + 2\alpha) + 1$$

se réduisant à un carré pour des valeurs entières de α *et* β, *l'équation indéterminée*

$$x^3 - (\alpha^3 - \beta^2) = y^2 \tag{1}$$

est résoluble en nombres entiers x, y, *indépendamment de la solution immédiate*

$$x = \alpha, \qquad y = \beta. \qquad \text{(S. Réalis.)}$$

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

L'équation (1) peut s'écrire

$$(x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2) = (y - \beta)(y + \beta).$$

On pourra poser

$$x - \alpha = y + \beta,$$
$$x^2 + \alpha x + \alpha^2 = y - \beta.$$

L'élimination de x donne

$$y^2 - (3\alpha - 2\beta - 1)y + \beta^2 + 3\alpha^2 + 3\alpha\beta - \beta = 0,$$

d'où

$$B^2 - 4AC = t^2$$

ou

$$8\beta + 1 - 3(\alpha^2 + 2\alpha) = t^2,$$

ce qui est la relation énoncée.

Question 1558.

Le lieu des centres de toutes les coniques ayant un contact du troisième ordre, au même point d'une conique donnée, est une ligne droite. (Barisien.)

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Prenons pour axes des coordonnées la tangente et la normale au point considéré.

Pour que les deux coniques

$$x^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = 0,$$
$$x^2 + bxy + cy^2 + ey = 0$$

admettent un contact du troisième ordre, il suffit d'exprimer que les trois premières dérivées sont identiques pour $x = y = 0$. On trouve ainsi les conditions

$$e = E, \qquad b = B.$$

Mais le centre des coniques variables est donné par les équations

$$2x = by = 2x + By = 0.$$
$$bx + 2cy + e = 0.$$

La première de ces équations est indépendante de la variable e, ce qui établit la proposition.

Question 1577.

Soit pour n infini

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = h,$$

dans une série à termes positifs. Démontrer que

$$\lim \sqrt[n]{\frac{u_n}{\sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n}}} = \sqrt{h}.$$

(E. Cesaro.)

SOLUTION

Par M. Servais.

Soit

$$\frac{u_2}{u_1} = p_1, \qquad \frac{u_3}{u_2} = p_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{u_n}{u_{n-1}} = p_{n-1};$$

on a

$$p_1p_2\ldots p_{n-1}=\frac{u_n}{u_1},$$

$$p_2p_3\ldots p_{n-1}=\frac{u_n}{u_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$p_{n-1}=\frac{u_n}{u_{n-1}};$$

donc

$$\sqrt[n]{\frac{u_n}{\sqrt[n]{u_1u_2\ldots u_n}}}=\sqrt[n^2]{p_1p_2^2p_3^3\ldots p_{n-1}^{n-1}}.$$

Or, dans la série

$$p_1p_2p_2p_3p_3p_3\ldots p_{n-1}p_{n-1}\ldots p_{n-1}.$$

$$\lim p_{n-1}=h;$$

donc

$$\lim\sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{p_1p_2^2\ldots p_{n-1}^{n-1}}=h;$$

par conséquent,

$$\lim\sqrt[n^2]{p_1p_2^2\ldots p_{n-1}^{n-1}}=\sqrt{h}=\sqrt[n]{\frac{u_n}{\sqrt[n]{u_1u_2\ldots u_n}}}.$$

Question 1578.

Si $\lim n^x a_n = a$, *pour n infini, on a*

$$\lim n^x\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=ae^x.$$

(E. Cesaro.)

SOLUTION

Par MM. Servais et Lemaire.

Posons $\sqrt[x]{a_n}=b_n$, on a

$$\lim nb_n=\sqrt[x]{a};$$

donc

$$\lim n\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}=\sqrt[x]{a}\,e,$$

d'où

$$n^x\sqrt{a_1a^2\ldots a_n}=ae^x.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

1603. Soit ABC un triangle de surface maximum inscrit dans une ellipse E. — Démontrer que les cercles osculateurs à l'ellipse aux sommets de ce triangle, le cercle circonscrit, et l'ellipse ont un point commun P. — Soit P′ le symétrique de P par rapport au centre de l'ellipse : prouver que les droites P′A, P′B, P′C enveloppent une développée d'ellipse.

(LEMAIRE.)

1604. Démontrer que, si une parabole P touche les diamètres conjugués égaux d'une ellipse E, les cordes communes à l'ellipse et aux cercles osculateurs à cette courbe aux points de contact des tangentes communes à P et à E passent par un même point; la polaire de ce point par rapport à l'ellipse est tangente à la parabole. (LEMAIRE.)

1605. SP_1 et SP_2 sont des tangentes à une parabole de foyer F; des points de contact P_1 et P_2 on abaisse des perpendiculaires sur la directrice; les deux pieds de ces perpendiculaires étant p_1 et p_2, montrer que les deux triangles

$$P_1FP_2 \quad \text{et} \quad p_1Sp_2$$

ont la même aire.

(H. SCHROETER.)

1606. Le rayon de courbure en un point M de la lemniscate de Bernoulli est égal au tiers de la normale limitée à la perpendiculaire abaissée du centre O sur le rayon vecteur OM.

(D'OCAGNE.)

1607. Trouver les trajectoires orthogonales d'une sphère de rayon constant dont le centre parcourt une ligne droite.

(LUCIEN LÉVY.)

1608. Démontrer, par des considérations géométriques et par le calcul, que les trajectoires orthogonales d'une sphère de rayon constant, dont le centre parcourt une circonférence, sont des courbes sphériques. (LUCIEN LÉVY.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1595.

Les rayons de courbure ρ_1 et ρ_2 aux extrémités A *et* B *d'une corde quelconque d'une conique sont proportionnels aux cubes des distances* CA *et* CB *de ces points au pôle* C *de la corde.*

SOLUTION.

Par M. R. de Crès, ingénieur civil.

Nous prendrons pour points de départ :

1° La formule classique

$$\rho = r\frac{dr}{dp}, \tag{1}$$

où r et ρ désignent respectivement le rayon vecteur et le rayon de courbure en un point d'une courbe quelconque et p la distance de l'origine à la tangente en ce point;

2° La proposition élémentaire suivante :

Les distances d'un point quelconque d'une médiane d'un triangle aux deux côtés qui la comprennent sont inversement proportionnelles à ses côtés. Cela résulte de ce que la médiane partage le triangle en deux parties équivalentes.

Cela posé, soient A_1 et B_1 les points où les tangentes CA et CB rencontrent une corde A'B' parallèles à AB et infiniment voisine de AB. La formule (1), appliquée aux points A et B, le point C étant pris pour origine, donne

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \lim\left(\frac{\text{CA}}{\text{CB}}\,\frac{\text{AA}_1}{\text{BB}_1}\,\frac{\text{CQ}}{\text{CP}}\right),$$

P et Q désignant les projections de C sur les tangentes en A' et en B'. Or le second rapport est manifestement égal au premier; quant au troisième, puisque les tangentes en A' et en B' se croisent en un point C' du diamètre qui joint le point C au milieu de AB, il résulte de la remarque ci-dessus (2°), que ce rapport est égal à $\frac{C'A'}{C'B'}$, et, par suite, a pour limite $\frac{CA}{CB}$.

On a donc

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\overline{CA}^3}{\overline{CB}^3}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

N. B. — M. Barisien et M. Lez nous ont adressé des démonstrations analytiques, correctes, mais moins simples, de la Question 1595. Cette élégante proposition n'est pas nouvelle : elle a été énoncée et démontrée presque simultanément par Liouville dans le tome VI du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, et par Umpfenbach dans le tome 30 du *Journal de Crelle*. Depuis, divers géomètres, parmi lesquels il faut surtout citer MM. Mannheim, Paucellier, d'Ocagne, Demoulin, l'ont retrouvée comme cas particulier de formules plus générales. On lira avec grand fruit sur ce sujet le supplément à la 15e Leçon du *Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique* (2e édition), par M. Mannheim.

Question 1550.

Étant donnés un cercle fixe et une droite tournant autour d'un point fixe, on considère un cercle de rayon constant tangent au cercle et à la droite; on demande le lieu du point de contact de ce cercle et de la droite.

(D'OCAGNE.)

SOLUTIONS.

Par M. H. BROCARD.

Première solution. — Soient

O le point fixe;
A le centre du cercle fixe de rayon b, $OA = a$;
C le centre du cercle mobile de rayon c;
OM une tangente à ce cercle en M;
OA l'axe des x;
α, β les coordonnées du point C.

Le cercle C aura pour équation

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = c^2,$$

avec

$$(\alpha - a)^2 + \beta^2 = (b \pm c)^2.$$

La polaire MM' de l'origine O a pour équation

$$\alpha x + \beta y + c^2 = 0.$$

Il reste donc à éliminer α, β entre ces trois équations, ce qui revient à éliminer α (ou β) entre deux équations du second degré.

Seconde solution. — Soient

$$OM = \rho, \qquad MOA = \omega, \qquad CAX = 0.$$

On a immédiatement les relations

$$\rho^2 + c^2 = a^2 + (b + c)^2 + 2a(c + b)\cos\theta,$$
$$a = \rho\cos\omega + c\sin\omega - (b + c)\cos\theta,$$

entre lesquelles l'élimination de θ donne l'équation du lieu (M),

$$b\rho = a(b + c)\cos\omega \pm \sqrt{M\sin^2\omega + N\sin\omega + P},$$

M, N, P désignant des fonctions entières de a, b, c.

Question 1562.

Soient donnés deux points P, P_1 *du plan d'un triangle* ABC *et l'on désigne de la manière suivante les points d'intersection*

$$(PA, BC) = a, \qquad (P_1A, BC) = a_1,$$
$$(PB, CA) = b, \qquad (P_1B, CA) = b_1,$$
$$(PC, AB) = c, \qquad (P_1C, AB) = c_1;$$
$$(bc_1, cb_1) = A_1, \qquad (bc, b_1c_1) = A_2,$$
$$(ca_1, ac_1) = B_1, \qquad (ca, c_1a_1) = B_2,$$
$$(ab_1, ba_1) = C_1, \qquad (ab, a_1b_1) = C_2:$$

1° *Les cinq points* P, P_1, A_1, B_1, C_1, *sont en ligne droite;*

2° *Les quatre points*

A, A_1, B_2, C_2 *sont en ligne droite*

B, B_1, C_2, A_2 »

C, C_1. A_2. B_2 »

3° *Les trois droites*

AA_2, BB_2, CC_2 *concourent au même point* O,
aA_2, bB_2, cC_2 » Q,
a_1A_2, b_1B_2, c_1C_2 » R;

4° *Les huit points* a, b, c; a_1, b_1, c_1; Q, R *sont situés sur une même conique.* (H. SCHROETER.)

SOLUTION.

Par M. LEZ.

Prenons le triangle ABC pour triangle de référence, les équations des droites AP, BP, CP sont

$$(1)\qquad n\gamma - m\beta = 0, \qquad l\alpha - n\gamma = 0, \qquad m\beta - l\alpha = 0,$$

et celles de AP_1, BP_1, CP_1 sont

$$(2)\qquad n'\gamma - m'\beta = 0, \qquad l'\alpha - n'\gamma = 0, \qquad m'\beta - l'\alpha = 0.$$

Dès lors, on trouve facilement pour les droites

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ll} bc_1, & l'l\alpha - lm'\beta - l'n\gamma = 0 \\ cb_1, & l'l\alpha - l'm\beta - ln'\gamma = 0 \end{array}\right\} \text{ point } A_1,$$

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{ll} ca_1 & lm'\alpha - mm'\beta + mn'\gamma = 0 \\ ac_1 & l'm\alpha - mm'\beta + m'n\gamma = 0 \end{array}\right\} \text{ point } B_1,$$

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{ll} ab_1, & l'n\alpha + mn'\beta - nn'\gamma = 0 \\ ba_1, & ln'\alpha + m'n\beta - nn'\gamma = 0 \end{array}\right\} \text{ point } C_1;$$

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{ll} bc, & l\alpha - m\beta - n\gamma = 0 \\ b_1c_1, & l'\alpha - m'\beta - n'\gamma = 0 \end{array}\right\} \text{ point } A_2.$$

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{ll} ca, & l\alpha - m\beta + n\gamma = 0 \\ c_1a_1, & l'\alpha - m'\beta + n'\gamma = 0 \end{array}\right\} \text{ point } B_2,$$

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{ll} ab, & l\alpha + m\beta - n\gamma = 0 \\ a_1b_1, & l'\alpha + m'\beta - n'\gamma = 0 \end{array}\right\} \text{ point } C_2.$$

Cela posé :

1° Une droite menée par le point T a pour équation

$$n\gamma = m\beta - \lambda(l\alpha - n\gamma) = 0;$$

elle passera par le point P_1 si cette équation est vérifiée par

$$n'\gamma - m'\beta = 0, \qquad l'\alpha - n'\gamma = 0;$$

de là la condition

$$\lambda = \frac{(m'n - mn')l'}{(ln' - l'n)m'},$$

ce qui donne pour l'équation de la droite PP_1,

$$ll'(m'n - mn')\alpha + mm'(ln' - nl')\beta + nn'(l'm - lm')\gamma = 0.$$

Cette droite passe par les points A_1, B_1, C_1, car son équation est vérifiée par les égalités (3, 4, 5).

2° A l'aide des équations (3, 4, 5), on trouve que les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont représentées par

$$\begin{aligned}(lm' - l'm)\beta + (l'n - ln')\gamma &= 0,\\ (lm' - l'm)\alpha + (mn' - m'n)\gamma &= 0,\\ (l'n - ln')\alpha + (mn' - m'n)\beta &= 0.\end{aligned}$$

On voit de suite qu'elles passent : la première, par les points C_2, B_2; la deuxième, par les points A_2, C_2; la troisième, par les points A_2, B_2, car les coordonnées de A_2, B_2, C_2 sont respectivement

$$(9) \qquad -\frac{\alpha}{mn' - m'n} = \frac{\beta}{l'n - ln'} = \frac{\gamma}{lm' - l'm},$$

$$(10) \qquad \frac{\alpha}{mn' - m'n} = -\frac{\beta}{l'n - ln'} = \frac{\gamma}{lm' - l'm},$$

$$(11) \qquad \frac{\alpha}{mn' - m'n} = \frac{\beta}{l'n - ln'} = -\frac{\gamma}{lm' - l'm}.$$

3° L'équation d'une droite menée par le point A_2 étant de la forme

$$(12) \qquad l\alpha - m\beta - n\gamma - k(l'\alpha - m'\beta - n'\gamma) = 0,$$

cette droite passera par le point A, si son équation est satisfaite par $\gamma = 0$, $\beta = 0$; de là la condition $k = \frac{l}{l'}$, ce qui donne pour l'équation de la droite A_2A

$$-(lm' - l'm)\beta + (l'n - ln')\gamma = 0.$$

De même, on trouve pour les droites B_2B, C_2C,

$$\begin{aligned}+(lm' - l'm)\alpha - (mn' - m'n)\gamma &= 0,\\ -(l'n - ln')\alpha + (mn' - m'n)\beta &= 0,\end{aligned}$$

Ces trois droites sont concourantes, car on obtient une somme nulle en ajoutant les trois équations préalablement multipliées : la première, par $(mn' - m'n)$; la deuxième, par $(l'n - ln')$; la troisième, par $(lm' - l'm)$.

De même la droite (12) passera par le point a, si son équation est vérifiée par $\alpha = 0$, $n\gamma - m\beta = 0$, ce qui donne

$$k = \frac{2mn}{m'n + mn'},$$

et, par suite, pour l'équation de $A_2 a$,

$$\begin{aligned} &n(lm' - l'm)\alpha - m(l'n - ln')\alpha \\ &\quad - m(mn' - m'n)\beta + n(mn' - m'n)\gamma = 0. \end{aligned}$$

On trouve aussi pour $B_2 b$, $C_2 c$

$$\begin{aligned} &l(l'n - ln')\alpha - n(lm' - l'm)\beta \\ &\quad + l(mn' - m'n)\beta - n(l'n - ln')\gamma = 0, \\ &- l(lm' - l'm)\alpha + m(lm' - l'm)\beta \\ &\quad + m(l'n - ln')\gamma - l(mn' - m'n)\gamma = 0. \end{aligned}$$

Ces trois droites sont encore concourantes et les coordonnées de leur point de rencontre Q sont

$$(13) \qquad \frac{\alpha}{l(mn' - m'n)^2} = \frac{\beta}{m(l'n - ln')^2} = \frac{\gamma}{n(lm' - l'm)^2}.$$

Enfin, la même droite (12) passera par le point a_1 si son équation est vérifiée par $\alpha = 0$, $n'\gamma - m'\beta = 0$, ce qui donne

$$k = \frac{2m'n'}{mn' + m'n}.$$

Par suite, l'équation de $A_2 a_1$ sera

$$\begin{aligned} &n'(l'm - lm')\alpha - m'(ln' - l')\alpha \\ &\quad - m'(m'n - mn')\beta + n'(m'n - mn')\gamma = 0; \end{aligned}$$

c'est du reste celle de $A_2 a$ dans laquelle on a permuté les accents.

Pour les droites $B_2 b_1$, $C_2 c_1$, on a

$$\begin{aligned} &l'(ln' - l'n)\alpha - n'(l'm - lm')\beta \\ &\quad + l'(m'n - mn')\beta - n'(ln' - l'n)\gamma = 0, \\ &- l'(l'm - lm')\alpha + m'(l'm - lm')\beta \\ &\quad - m'(ln' - l'n)\gamma - l'(m'n - mn')\gamma = 0. \end{aligned}$$

Ces droites concourent au point R, ayant pour coordonnées

$$(14)\qquad \frac{\alpha}{l'(mn'-m'n)^2}=\frac{\beta}{m'(l'n-ln')^2}=\frac{\gamma}{n'(lm'-l'm)^2}.$$

4° Une conique représentée en général par

$$(15)\qquad p\alpha^2+q\beta^2+r\gamma^2+2f\beta\gamma+2g\alpha\gamma+2h\alpha\beta=0,$$

passera par les points a, b, c, a_1, b_1, c_1, si les conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} &qn^2+rm^2+2fmn=0, && qn'^2+rm'^2+2fm'n'=0,\\ &pn^2+rl^2+2gln=0, && pn'^2+rl'^2+2gl'n'=0,\\ &pm^2+ql^2+2hlm=0, && pm'^2+ql'^2+2hl'm'=0. \end{aligned}$$

Ces relations fournissent de nouvelles égalités

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{qn^2+rm^2}{mn}=\frac{qn'^2+rm'^2}{m'n'}=-2f,\\ &\frac{pn^2+rl^2}{ln}=\frac{pn'+rl'^2}{l'n'}=-2g,\\ &\frac{pm^2+ql^2}{lm}=\frac{pm'^2+ql'^2}{l'm'}=-2h; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$qnn'-rmm'=pnn'-rll'=pmm'-qll'=0.$$

Alors on peut d'abord écrire

$$\frac{p}{ll'}+\frac{q}{mm'}=\frac{r}{nn'};$$

puis, les égalités (16) donnent

$$\begin{aligned} 2f&=-(mn'+m'n),\\ 2g&=-(l'n+ln'),\\ 2h&=-(l'm+lm'); \end{aligned}$$

par suite, l'équation (15) devient

$$\begin{aligned} ll'\alpha^2+mm'\beta^2+nn'\gamma^2&-(mn'+m'n)\beta\gamma\\ &-(l'n+ln')\alpha\gamma-(l'm+lm')\alpha\beta=0; \end{aligned}$$

elle montre que cette conique passe encore par les points Q et R, car son équation est vérifiée par les coordonnées (13) et (14) de ces deux points.

N. B. — M. Emmerich nous a adressé une solution analogue.

Question 1553.

Soient A, B, a, b, c *des nombres entiers positifs, et* $100a + 10b + c$ *divisible par* $10A + B$; *démontrer que* $cA^2 - bAB + aB^2$ *est, de même, divisible.*

(P.-A. Mac-Mahon, R. A.)

SOLUTION.

Par M. H. Brocard.

Divisant $cA^2 - bAB + aB^2$ par $10A + B$ (après avoir ordonné par rapport aux puissances décroissantes de B), on trouve pour reste

$$(100a + 10b + c)A^2,$$

ce qui établit la proposition.

Question 1581.

Étant donné un quadrilatère complet, dont les six sommets opposés sont a, a_1, b, b_1, c, c_1, *on peut former les quatre triangles*

$$ab_1c_1, \quad bc_1a_1, \quad ca_1b_1, \quad abc.$$

Si l'on prend trois points en ligne droite

$$A, \quad B, \quad C,$$

les quatre coniques

$$(BCab_1c_1), \quad (BCbc_1a_1), \quad (BCca_1b_1), \quad (BCabc)$$

passent par un même point A_1;

$$(CAab_1c_1), \quad (CAbc_1a_1), \quad (CAca_1b_1), \quad (CAabc)$$

passent par un même point B_1;

$$(ABab_1c_1), \quad (ABbc_1a_1), \quad (ABca_1b_1), \quad (ABabc)$$

passent par un même point C_1.

Les points A, B_1, C_1 *sont en ligne droite; et il en est de même de* B, C_1, A_1, *et de* C, A_1, B_1. *De plus, les huit côtés des deux quadrilatères dont les sommets opposés sont* a, a_1, b, b_1, c, c_1 et A, A_1, B, B_1, C, C_1 *touchent une même conique.*

(H. Schroeter.)

SOLUTION.

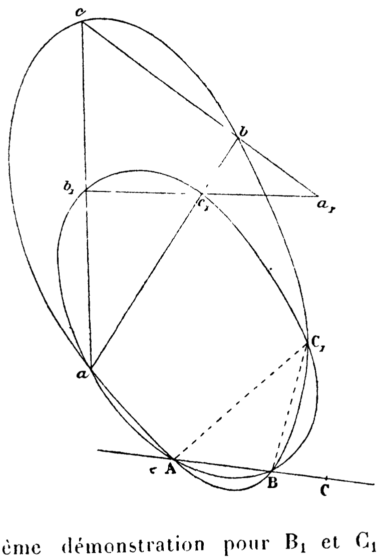
Par M. Lemaire.

On sait que, si plusieurs cubiques ont huit points communs, elles ont un neuvième point commun.

Il en résulte que les cubiques suivantes, formées d'une conique et d'une droite

$$(\mathrm{BC}ab_1c_1,\ a_1bc),$$
$$(\mathrm{BC}bc_1a_1,\ b_1ca),$$
$$(\mathrm{BC}ca_1b_1,\ c_1ab),$$
$$(\mathrm{BC}abc,\ a_1b_1c_1),$$

qui ont huit points communs : a, b, c, a_1, b_1, c_1, B et C, en ont un neuvième A_1 qui appartient forcément aux quatre



coniques. Même démonstration pour B_1 et C_1. Ceci posé, remarquons que les triangles ab_1c_1 et ABC_1 ont leurs six côtés tangents à une même conique Δ, puisque ces deux triangles sont inscrits dans une même conique ($ABab_1c_1$).

Pour la même raison, les triangles abc et ABC_1 ont leurs six côtés tangents à une même conique Δ'.

Mais Δ et Δ' ont cinq tangentes communes, savoir : les trois côtés du triangle ABC_1 et les deux droites ab_1c et ac_1b. Par conséquent ces deux côtés coïncident, ce qui montre que la conique tangente aux quatre côtés du quadrilatère donné et à la droite ABC est tangente aux droites AC_1 et BC_1.

Elle est aussi tangente aux droites analogues BA_1 et CA_1 d'une part, CB_1 et AB_1 d'autre part.

Cette conclusion exige d'ailleurs que les six points A, A_1, B, B_1, C, C_1 soient les sommets d'un quadrilatère complet.

En effet, la conique précédente devant être à la fois tangente à AB, AC_1 et AB_1, deux de ces droites doivent se confondre, et comme A_1, B_1, C_1 ne sont pas sur ABC, les droites AC_1 et AB_1 se confondent nécessairement; autrement dit A, B_1, C_1 sont en ligne droite. Même démonstration pour B, C_1, A_1 et C, A_1, B_1.

N. B. — M. Demetreo Valeri, professeur à Modène (Italie), a également résolu la question.

Question 1603.

Soit ABC *un triangle de surface maximum inscrit dans une ellipse* E. *Démontrer que les cercles osculateurs à l'ellipse aux sommets de ce triangle, le cercle circonscrit et l'ellipse, ont un point commun* P. *Soit* P' *le symétrique de* P *par rapport au centre* O *de l'ellipse. Prouver que les droites* P'A, P'B, P'C *envelopppent une développée d'ellipse.*

(LEMAIRE.)

SOLUTION.

Par M. G. DARBOUX, élève de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand.

Un triangle maximum inscrit dans une ellipse est la projection d'un triangle maximum inscrit dans le cercle, c'est-à-dire d'un triangle équilatéral. Par suite, les angles d'anomalie excentrique des sommets d'un tel triangle sont

$$\varphi, \quad \varphi + \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi + \frac{4\pi}{3}.$$

On sait, d'autre part, que, si l'on appelle $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ les paramètres de quatre points d'une ellipse situés sur un même cercle, on a la relation

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2k\pi.$$

Considérons le cercle circonscrit au triangle ABC. Il coupe l'ellipse en un quatrième point dont nous allons chercher le paramètre φ'. On a

$$\varphi' + 3\varphi + \frac{6\pi}{3} = 2k\pi$$

ou

$$\varphi' + 3\varphi = 2k'\pi.$$

On peut supposer $k' = 0$ et prendre $\varphi' = -3\varphi$. Soit P le point ainsi obtenu.

Considérons maintenant le cercle osculateur en un quelconque des sommets du triangle : nous pouvons toujours supposer que ce sommet est celui pour lequel l'angle d'anomalie excentrique est φ.

Ce cercle coupe l'ellipse en un quatrième point. La valeur φ'' de l'angle d'anomalie excentrique de ce point est donnée par

$$\varphi'' + 3\varphi = 2k\pi.$$

On retrouve ainsi le point P.

La première partie de la proposition se trouve démontrée.

Soit P' la symétrique de P. L'angle d'anomalie qui lui correspond est $\pi - 3\varphi$. La droite qui le joint au sommet déjà considéré du triangle a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a\cos\varphi & b\sin\varphi & 1 \\ a\cos(\pi - 3\varphi) & b\sin(\pi - 3\varphi) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant et divisant par $ab(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$,

$$(1) \qquad \frac{x}{a\cos\varphi} + \frac{y}{b\sin\varphi} - 2 = 0.$$

Cherchons l'enveloppe de cette droite. Nous avons pour cela à éliminer φ entre l'équation (1) et sa dérivée par rapport à φ, qui est

$$-\frac{x\sin\varphi}{a\cos^2\varphi}+\frac{y\cos\varphi}{b\sin^2\varphi}=0.$$

On déduit de là

$$\frac{\sin^3\varphi}{ay}=\frac{\cos^3\varphi}{bx}=\frac{1}{\sqrt{ay^{\frac{2}{3}}+bx^{\frac{2}{3}}}}.$$

Par suite, l'équation de l'enveloppe est

$$\frac{x}{a\dfrac{(bx)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{ay^{\frac{2}{3}}+bx^{\frac{2}{3}}}}}+\frac{y}{b\dfrac{(ay)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{ay^{\frac{2}{3}}+bx^{\frac{2}{3}}}}}-2=0$$

ou

$$(bx)^{\frac{2}{3}}+(ay)^{\frac{2}{3}}=(2ab)^{\frac{2}{3}}.$$

C'est bien l'équation de la développée d'une ellipse concentrique à l'ellipse E et dont l'équation est

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}=0.$$

AUTRE SOLUTION.

Par M. Barisien.

On sait que les triangles d'aire maximum inscrits dans une ellipse jouissent de la propriété d'avoir leurs tangentes aux sommets A, B, C, parallèles aux côtés opposés. On sait aussi que les cordes communes à un cercle et à une ellipse sont également inclinées sur les axes de l'ellipse.

Ces propriétés étant rappelées, si P est le quatrième point de rencontre avec l'ellipse du cercle circonscrit au triangle ABC, les droites PA et CB sont également inclinées sur les axes de l'ellipse. Comme CB est parallèle à la tangente à l'ellipse en A, il en résulte que PA et cette tangente en A sont aussi également inclinées sur les axes de l'ellipse. Or, le cercle osculateur en A ayant en ce point trois points confondus, son quatrième point d'intersection avec l'ellipse est le point P. Les cercles osculateurs en B et C ont, pour la même raison, leurs quatrièmes points d'intersection avec l'ellipse en P. Par conséquent, les cercles osculateurs en A, B, C, le cercle circonscrit à ABC et l'ellipse ont pour point commun le point P.

Il reste à trouver l'enveloppe des droites telles que P'A, laquelle sera évidemment la même que celle des droites P'B et P'C. AP et la tangente en A étant également inclinées sur les axes, il en résulte que les droites AP' et OA dont les directions sont respectivement conjuguées des précédentes, sont aussi également inclinées sur les axes.

L'équation de la droite AP' s'obtiendra donc en exprimant que son coefficient angulaire est égal et de signe contraire à celui de OA. Si φ est l'angle excentrique en A, cette équation de AP' est donc

$$y - b\sin\varphi = -\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}(x - a\cos\varphi).$$

C'est l'équation (1) de M. Darboux, et la solution s'achève comme ci-dessus. Ajoutons toutefois cette remarque :

Les normales à l'ellipse en A, B, C se coupent en un même point ω, puisque ce point est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle formé par les pôles A', B', C' des côtés du triangle ABC. La quatrième normale abaissée de ce point ω sur l'ellipse est la droite ωP'. En effet, les quatre points A, B, C, P étant sur un même cercle, il résulte, du théorème de Joachimsthal, que le symétrique P' de P par rapport au centre de l'ellipse est le pied de la quatrième normale abaissée de ω.

AUTRE SOLUTION.

Par M. E. Lemoine.

Soient a et b les demi-axes de E; appelons E_1 le cercle qui, lorsque l'on réduit ses ordonnées dans le rapport $\frac{b}{a}$, reproduit E, les axes coordonnés étant les axes de E. Soit $A_1B_1C_1$ le triangle correspondant à ABC; P_1 et P'_1 les points qui correspondent à P et à P'.

On sait, d'après un théorème célèbre de Steiner, que par tout point P d'une ellipse E passent, en outre du cercle osculateur en P, trois autres cercles osculateurs qui coupent l'ellipse en trois points A, B, C; on sait aussi que les points A, B, C ont pour correspondants sur le cercle E trois points A_1, B_1, C_1 qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, c'est-à-dire que ABC est un des triangles à aire maxima inscrit à E.

La première partie de la question est la réciproque évidente de cette proposition.

Soient K et J les points où la droite $A_1P'_1$ coupe les axes des x et des y, A_1P_1 étant la droite symétrique de la tangente en A_1 au cercle E_1 par rapport à l'ordonnée de A_1 (puisque, d'après une propriété connue, AP est symétrique de la tangente en A au cercle E par rapport à l'ordonnée de A), on a facilement : angle $A_1KO = \varphi$; donc $A_1K = OA_1$, de même $A_1J = OA_1$.

Donc JK est une droite de longueur constante $2a$ qui appuie ses extrémités K et J sur les axes des x et des y; elle engendre donc une hypocycloïde à quatre rebroussements et la courbe correspondante, c'est-à-dire l'enveloppe de P'A, est la développée de l'ellipse qui a pour demi-axes $\frac{a^2b}{a^2-b^2}$, $\frac{ab^2}{a^2-b^2}$, le grand axe étant dirigé comme l'axe des y. C. Q. F. D.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1609. Étudier les courbes enveloppées par les droites

$$x\cos\lambda + y\sin\lambda + P_n = 0.$$

P_n est un polynôme de degré n en λ, et λ un paramètre variable. Montrer que l'on peut disposer des constantes du polynôme P_n de manière que pour n pair les courbes n'aient aucun point de rebroussement et que pour n impair elles en aient un. Que peut-on dire des points de rebroussement lorsque les constantes demeurent quelconques?

(Lucien Lévy.)

1610. Trouver le lieu des pieds des normales abaissées d'un point donné sur les coniques d'un faisceau. (Darboux.)

1611. On donne deux faisceaux de coniques, et on demande le lieu des points où une conique de l'un des faisceaux touche les diverses coniques de l'autre faisceau. (DARBOUX.)

1612. Démontrer que le point où la normale en un point quelconque M d'une conique rencontre l'axe non focal appartient à la droite qui joint un foyer de la conique à la projection du point M sur la directrice correspondant à ce foyer.

(E. ROUCHÉ.)

1613. Démontrer que le côté de l'heptagone régulier est égal, à moins de $\frac{1}{500}$ de sa valeur, à la moitié du côté du triangle équilatéral inscrit dans le même cercle.

(J. JOFFROY.)

1614. Dans l'espace, deux figures corrélatives peuvent toujours être placées de manière à être polaires réciproques par rapport à une quadrique réelle. (G. TARRY.)

1615. A, B, C étant trois points d'une conique, les parallèles menées par C aux tangentes en A et B coupent respectivement les rayons OA et OB issus du centre O aux points D et E; démontrer que DE est parallèle à la tangente en C.

(W.-G. GREENSTREAT M. A.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1587.

On sait que le lieu des points d'où l'on peut mener à une ellipse des tangentes faisant entre elles un angle donné est une courbe de quatrième degré.

Démontrer que, si d'un point quelconque de cette courbe on abaisse les quatre normales à l'ellipse, réelles ou imaginaires, si N_1, N_2, N_3, N_4 *sont les distances du point aux pieds des normales,* ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 *les rayons de courbure correspondant aux pieds des normales, on a la relation*

$$\frac{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}{N_1 N_2 N_3 N_3} = \text{const.}$$

(E. BARISIEN.)

SOLUTION.

Par M. L. Bosi, professeur au lycée de Chiavari (Italie).

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de l'ellipse. Le lieu des points d'où l'on peut mener à l'ellipse des tangentes faisant entre elles un angle donné ψ a pour équation

$$(1)\quad 4(b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2) = (\xi^2 + \eta^2 - a^2 - b^2)^2 \operatorname{tang}^2\psi,$$

où ξ, η sont les coordonnées courantes.

L'équation

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = x^4 - \frac{2a^2\xi}{c^2}x^3 \\ + \frac{a^2}{c^4}(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - c^4)x^2 + \frac{2a^4\xi}{c^2}x - \frac{a^6\xi^2}{c^4} = 0, \end{aligned}\right.$$

où $c^2 = a^2 - b^2$, donne les abscisses x_1, x_2, x_3, x_4 des pieds des normales à l'ellipse, abaissées d'un point $P(\xi, \eta)$.

Les projections de N_1, N_2, N_3, N_4 sur l'axe X sont

$$\xi - x_1,\quad \xi - x_2,\quad \xi - x_3,\quad \xi - x_4,$$

et celles de ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 sur le même axe

$$\frac{c^2x_1}{a^4}\left(\frac{a^4}{c^2} - x_1^2\right),\quad \frac{c^2x_2}{a^4}\left(\frac{a^4}{c^2} - x_2^2\right),$$
$$\frac{c^2x_3}{a^4}\left(\frac{a^4}{c^2} - x_3^2\right),\quad \frac{c^2x_4}{a^4}\left(\frac{a^4}{c^2} - x_4^2\right).$$

On a donc

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}{N_1N_2N_3N_4} \\ &= \frac{\left\{\begin{aligned} c^8x_1x_2x_3x_4\left(\frac{a^2}{c} - x_1\right)\left(\frac{a^2}{c} - x_2\right)\left(\frac{a^2}{c} - x_3\right)\left(\frac{a^2}{c} - x_4\right) \\ \times\left(\frac{a^2}{c} + x_1\right)\left(\frac{a^2}{c} + x_2\right)\left(\frac{a^2}{c} + x^3\right)\left(\frac{a_2}{c} + x_4\right)\end{aligned}\right\}}{a^{16}(\xi - x_1)(\xi - x_2)(\xi - x_3)(\xi - x_4)}. \end{aligned}\right.$$

Mais de (2) on tire

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = -\frac{a^6 \xi^2}{c^4},$$

$$\left(\frac{a^2}{c} - x_1\right)\left(\frac{a^2}{c} - x_2\right)\left(\frac{a^2}{c} - x_3\right)\left(\frac{a^2}{c} - x_4\right)$$
$$= f\left(\frac{a^2}{c}\right) = \frac{a^6 b^2}{c^6}(\xi^2 + \eta^2 + c^2 - 2c\xi),$$

$$\left(\frac{a^2}{c} + x_1\right)\left(\frac{a^2}{c} + x_2\right)\left(\frac{a^2}{c} + x_3\right)\left(\frac{a^2}{c} + x_4\right)$$
$$= f\left(-\frac{a^2}{c}\right) = \frac{a^6 b^2}{c^6}(\xi^2 + \eta^2 + c^2 + 2c\xi),$$

$$(\xi - x_1)(\xi - x_2)(\xi - x_3)(\xi - x_4)$$
$$= f(\xi) = \frac{b^2\xi^2}{c^4}(b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2 b^2),$$

et, en substituant dans (3), on obtient

$$\frac{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}{N_1 N_2 N_3 N_4} = \frac{a^2 b^2(\xi^2 + \eta^2 + c^2 - 2c\xi)(\xi^2 + \eta^2 + c^2 + 2c\xi)}{c^4(b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2 b^2)},$$

ou, réductions faites,

$$(4) \qquad \frac{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}{N_1 N_2 N_3 N_4} = \frac{a^2 b^2}{c^4}\left[4 + \frac{(\xi^2 + \eta^2 - a^2 - b^2)^2}{b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2 b^2}\right].$$

Si le point $P(\xi, \eta)$ est pris sur la courbe (1), l'égalité (4) devient

$$\frac{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}{N_1 N_2 N_3 N_4} = \frac{4a^2 b^2}{c^2 \sin^2\varphi}.$$

C. Q. F. D.

Question 1598.

Le lieu des centres des hyperboles équilatères osculateurs en chaque point d'une ellipse donnée est une courbe du quatrième ordre qui peut être considérée comme la podaire du centre d'une ellipse concentrique à la première.

(BARISIEN.)

SOLUTION.

Par M. AUDIBERT.

Soit

$$(1) \qquad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

une ellipse rapportée à ses axes. Rapportons-la à la normale et à la tangente en un de ses points M, son équation sera

$$x^2 + 2dxy + cy^2 + 2ey = 0,$$

et celle de l'hyperbole osculatrice en M,

$$x^2 + 2dxy - y^2 + 2ey = 0.$$

Le centre de cette hyperbole est donné par les relations

$$x + dy = 0, \tag{2}$$

$$dx - y + e = 0. \tag{3}$$

L'équation (2) représente le rayon vecteur qui passe par le centre O de l'ellipse (1) et par le point M. On voit qu'il coupe normalement la droite (3). Il en résulte que le lieu des centres des hyperboles osculatrices, quand le point M se déplace, est la podaire, relative au centre O de l'ellipse, de l'enveloppe de la droite (3).

On détermine l'équation de (3) rapportée aux axes de l'ellipse, en remarquant que cette droite, perpendiculaire au rayon vecteur OM, coupe la normale à l'ellipse en un point extérieur B tel que

$$\text{MB} = e = \text{rayon de courbure en } \text{M}(x, y).$$

Cette équation est

$$\text{Y}y + \text{X}x = a^2 + b^2$$

et celle de l'enveloppe

$$a^2\text{X}^2 + b^2\text{Y}^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

Question 1605.

SP_1 *et* SP_2 *sont des tangentes à une parabole de foyer* F; *des points de contact* P_1 *et* P_2 *on abaisse des perpendiculaires sur la directrice; les pieds de ces perpendiculaires étant* p_1 *et* p_2, *montrer que les triangles* P_1FP_2 *et* p_1Sp_2 *ont la même aire.*

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par M. LEMAIRE.

F et p_1 étant symétriques par rapport à SP_1, les triangles SFP_1 et Sp_1P_1 sont égaux. Il en est de même des triangles SFP_2 et Sp_2P_2.

Donc

$$\text{aire}\, Sp_1 P_1 F P_2 p_2 = 2(\text{aire}\, Sp_1 P_1 + \text{aire}\, Sp_2 P_2)$$
$$= 2 \times \text{aire}\, P_1 p_1 p_2 P_2.$$

Les parties non communes à ces deux polygones sont équivalentes, ce qui démontre la proposition.

N. B. — M. Lemoine nous a envoyé aussi une solution géométrique. Quant à la vérification analytique, elle n'offre aucune difficulté : elle a été effectuée par MM. Audibert, Lez, Baudran, Louis Bardelli, Barisien et W.-J. Greenstreet M. A.

Question 1606.

Le rayon de courbure en un point M *de la lemniscate de Bernoulli est égal au tiers de la normale limitée à la perpendiculaire au rayon vecteur* OM *menée par le point* O.

(d'Ocagne.)

SOLUTION.

Par M. Louis Bardelli, élève ingénieur à l'Institut technique de Milan.

Désignons par r et θ les coordonnées polaires d'un point M d'une courbe plane, par ρ le rayon de courbure en ce point, par p la distance du pôle O à la tangente en M, enfin par n la normale en M limitée à la perpendiculaire menée par le pôle sur le rayon vecteur OM ; on a

$$(1)\qquad p = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}}, \qquad pn = r^2, \qquad \rho = r\,\frac{dr}{dp}.$$

L'application de la première formule à l'équation

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

de la lemniscate de Bernoulli donne

$$p = \frac{r^3}{a^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dr}{dp} = \frac{a^2}{3r^2},$$

et, en portant ces valeurs dans les deux dernières équations (1), on obtient

$$n = \frac{a^2}{r}, \qquad \rho = \frac{a^2}{3r} = \frac{n}{3}.$$

N. B. — Ont aussi résolu la question : MM. Lez, Audibert, Balitrand, Barisien, Dertoux et W.-J. Greenstreet M. A. M. Barisien fait observer que, pour la courbe plus générale,

$$r^m = a^m \cos m\theta,$$

on a

$$\rho = \frac{n}{m+1};$$

pour $m = 2$, on a le théorème énoncé. Pour $m = -2$, la courbe est une hyperbole équilatère, et l'on a

$$\rho = -n.$$

Question 1602.

Par les sommets A, B, C *d'un triangle inscrit dans une conique, on mène à la courbe des tangentes qui rencontrent les côtés opposés en* A', B', C'; *les milieux de* AA', BB', CC' *sont en ligne droite.*

Dans le cas particulier du cercle, cette droite est l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle des neuf points.

(F. Farjon.)

SOLUTION

Par M. E. Lemoine.

Soit

$$(1) \qquad Lyz + Mzx + Nxy = 0$$

l'équation en coordonnées normales de la conique circonscrite à ABC.

Les coordonnées de A', B', C' seront

$$0,\ -M,\ N; \quad L,\ 0,\ -N; \quad -L,\ M,\ 0;$$

celles des milieux A_1, B_1, C_1 de AA', BB', CC' seront

$$bM - cN,\quad aM,\quad -aN,$$
$$-bL,\quad cN - aL,\quad bN,$$
$$cL,\quad -cM,\quad aL - bM,$$

et ces trois points sont sur la droite

$$(2)\quad \begin{cases} ax(bM + cN - aL) \\ \quad + by(cN + aL - bM) + cz(aL + bM - cN) = 0. \end{cases}$$

Si la conique est le cercle circonscrit, L, M, N sont a, b, c, et cette droite devient

$$x\cos A + y\cos B + z\cos C = 0,$$

qui représente l'axe orthique du triangle ABC, qui est, en effet, l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle de *Feuerbach*.

Remarques. — Si les équations (1) représentent des hyperboles équilatères, la droite (2) passe par le point

$$\cos A(b\cos B + c\cos C),\quad \ldots.$$

Si les équations (1) représentent des paraboles, la droite (2) enveloppera l'ellipse de *Steiner* inscrite au triangle.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. W.-J. Greenstreet M. A.

Soient A, B″, C, A″, B, C″ six points sur une conique. En supposant que A″, B″, C″ s'approchent de A, B, C, nous obtenons, à la limite, le triangle inscrit ABC avec les tangentes aux sommets. Le théorème de Pascal nous donne :

Les tangentes AA′, ... rencontrent BC, ... en trois points en ligne droite. Donc BCB′C′ est un quadrilatère complet, et les milieux des diagonales AA′, BB′, CC′ sont en ligne droite.

On peut remarquer que la droite sur laquelle ces milieux se trouvent est le lieu des centres de toutes les coniques inscrites dans BCB′C′ (*Nouv. Ann.*, t. I, p. 24; 1862).

Le cas particulier du cercle ne présente aucune difficulté.

Question 1607.

Trouver les trajectoires orthogonales d'une sphère de rayon constant dont le centre parcourt une ligne droite.

(Lucien Lévy.)

SOLUTION

Par M. Dertoux.

Soit Ox la ligne droite parcourue par le centre de la sphère. Les trajectoires orthogonales ont leurs tangentes normales aux plans tangents de la sphère mobile; ces tangentes passent donc constamment par le centre de la sphère, c'est-à-dire rencontrent la droite Ox. Si nous considérons les plans osculateurs déterminés par trois tangentes infiniment voisines, on voit que ces deux plans ont une tangente commune et contiennent aussi la droite Ox; donc ils se confondent et l'on en conclut que la courbe est plane. Le segment de la tangente intercepté entre le point de contact et Ox est constant et égal au rayon de la sphère.

Les trajectoires orthogonales sont donc des tractrices.

Traitons la question par l'Analyse.

Soit α la distance du centre de la sphère à l'origine O.

L'équation de la sphère est

$$(x-\alpha)^2+y^2+z^2=R^2.$$

Les équations différentielles des trajectoires orthogonales sont

$$\frac{dx}{x-\alpha}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z},$$

où

$$x-\alpha=\sqrt{R^2-y^2-z^2};$$

d'où

$$\frac{y\,dy+z\,dz}{y^2+z^2}=\frac{dx}{\sqrt{R^2-y^2-z^2}}$$

et, en posant,

$$y^2+z^2=u^2,\qquad dx=\frac{du\sqrt{R^2-u^2}}{u},$$

ce qui est l'équation différentielle de la tractrice.

[Les deux dernières équations (1) donnent $y=Cz$ et montrent que la courbe est plane.]

Question 1608.

Démontrer, par des considérations géométriques et par le calcul, que les trajectoires orthogonales d'une sphère de rayon constant, dont le centre parcourt une circonférence, sont des courbes sphériques.

SOLUTION

Par M. Dertoux.

Les tangentes aux trajectoires orthogonales rencontrent constamment la circonférence C que décrit le centre de la sphère, et le segment intercepté entre le point de contact et la circonférence C est toujours égal à R (rayon de la sphère).

Les trajectoires orthogonales sont donc des courbes équitangentielles.

Soient

DA, EB deux tangentes à une trajectoire, infiniment voisines;
D. E les points de contact;
A et B les points de rencontre avec la circonférence C.

Menons, dans le plan ADB des deux tangentes, les normales DO, EO qui se rencontrent au centre de courbure O.

Les triangles rectangles DOA, EAB sont égaux et

$$AO = BO.$$

Le point O est donc sur la perpendiculaire élevée dans le plan ABD sur le milieu de AB; et, à la limite, le centre de courbure est sur la normale à la circonférence C menée en A dans le plan osculateur correspondant de la trajectoire.

Le plan osculateur étant tangent en A à la circonférence C, l'axe de ce plan mené en O se trouve dans le plan normal en A à la circonférence C; il rencontre donc la perpendiculaire m au plan de cette circonférence menée par le centre.

On voit que les axes des plans osculateurs d'une trajectoire orthogonale rencontrent constamment la perpendiculaire m. Deux plans normaux quelconques de la trajectoire infiniment voisins rencontrent donc la perpendiculaire m au même point, et comme chacun n'a qu'un point sur cette ligne, il est facile d'en conclure que tous la rencontrent au même point et que la trajectoire orthogonale est sphérique.

Traitons la question par l'Analyse.

Prenons pour xOy le plan de C, et la perpendiculaire élevée au centre pour Oz.

Soient α et β les coordonnées du centre de la sphère.

L'équation de la sphère est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=R^2.$$

Les équations différentielles des trajectoires sont

$$\frac{dx}{x-\alpha} = \frac{dy}{y-\beta} = \frac{dz}{z}.$$

L'équation du plan normal à une trajectoire est

$$(1)\qquad (X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0$$

ou

$$(2)\quad (X - x)(x - \alpha) + (Y - y)(y - \beta) + (Z - z)z = 0.$$

L'équation du plan normal infiniment voisin est

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &(X - x - dx)(x - \alpha + dx - d\alpha) \\ &\quad + (Y - y - dy)(y - \beta + dy - d\beta) \\ &\qquad\qquad + (Z - z - dz)(z + dz) = 0. \end{aligned}\right.$$

Les équations (2) et (3) déterminent l'axe du plan osculateur au point (x, y, z).

En tenant compte de (1) et de (2), l'équation (3) devient

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &X\,d\alpha + Y\,d\beta - x\,d\alpha - y\,d\beta \\ &\quad + (x - \alpha)\,dx + (y - \beta)\,dy + z\,dz = 0. \end{aligned}\right.$$

Or, en différentiant l'équation de la sphère, on obtient, en remarquant que $\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta = 0$,

$$(x - \alpha)\,dx + (y - \beta)\,dy + z\,dz - x\,d\alpha - y\,d\beta = 0.$$

L'équation (4) se réduit donc à

$$X\,d\alpha + Y\,d\beta = 0.$$

Ce qui montre que l'axe du plan osculateur rencontre Oz, condition suffisante pour que la courbe soit sphérique.

Question 1610.

Trouver le lieu des pieds des normales abaissées d'un point donné sur les coniques d'un faisceau. (Darboux.)

SOLUTION

Par M. Barisien.

Le faisceau des coniques passant par les points d'intersection de

$$S = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$
$$S' = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2d'x + 2e'y + f' = 0$$

a pour équation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} S+\lambda S' = [&(a+\lambda a')x^2 + 2(b+\lambda b')xy \\ &+(c+\lambda c')y^2 + 2(d+\lambda d')x \\ &\quad +2(e+\lambda e')y + f + \lambda f'] = 0. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, l'hyperbole des pieds des normales abaissées du point donné (α, β) a pour équation

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &[(b+\lambda b')x + (c+\lambda c')y + e + \lambda e'](\alpha - x) \\ &\quad = [(a+\lambda a')x + (b+\lambda b')y + d + \lambda d'](\beta - y). \end{aligned}\right.$$

Pour avoir le lieu demandé, il faut éliminer λ entre (1) et (2), ce qui donne

$$\begin{aligned} &S'[(bx+cy+e)(\alpha - x) - (ax+by+d)(\beta - y)] \\ &\quad = S[(b'x+c'y+e')(\alpha - x) - (a'x+b'y+d')(\beta - y)]. \end{aligned}$$

Or les quantités entre crochets représentent les hyperboles des normales abaissées de (α, β) sur les coniques S et S'. Si nous représentons ces hyperboles par H et H', l'équation du lieu peut s'écrire

$$(3)\qquad S'H - SH' = 0.$$

C'est donc une quartique passant par les seize points d'intersection de

$$\left\{\begin{aligned} S &= 0, \\ S' &= 0, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} H &= 0, \\ H' &= 0, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} S &= 0, \\ H &= 0, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} S' &= 0, \\ H' &= 0. \end{aligned}\right.$$

Si $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, c'est-à-dire si les deux coniques S et S' ont mêmes directions et mêmes longueurs d'axes, la quartique (3) se réduit à une conique.

Question 1612.

Démontrer que le point N, *où la normale en un point quelconque* M *d'une conique rencontre l'axe non focal, appartient à la droite qui joint un foyer* F *de la conique à la projection* D *du point* M *sur la directrice correspondant à ce foyer.* (E. Rouché.)

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Soit P la projection du point M sur l'axe non focal YPN. O étant le centre de la conique, on aura

$$\mathrm{ON} = \frac{c^2}{b^2} y.$$

La propriété énoncée sera établie si l'on a la proportion

$$\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{PD}} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{ON} + \mathrm{OP}}$$

ou

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{ON} + y}.$$

Elle donne pour ON la même valeur $\frac{c^2}{b^2} y$.

N. B. — Solution analogue de M. H. Lez.

Question 1613.

Démontrer que le côté de l'heptagone régulier est égal, à moins de $\frac{1}{500}$ de sa valeur, à la moitié du côté du triangle équilatéral inscrit dans le même cercle. (J. Joffroy.)

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Cette construction fournit une solution approchée du problème proposé et résolu, il y a quarante ans, dans ce *Journal*, et attribué à Viète :

Soit une circonférence, A *le centre,* CAB *un diamètre. Sur* CB *prolongé prenez un point* D *tel que l'on ait*

$$\mathrm{DB}.\overline{\mathrm{DC}}^2 = \mathrm{AD}.\overline{\mathrm{AB}}^2.$$

Du point D *comme centre, et d'un rayon* AB, *décrivez une circonférence coupant en* E *une circonférence donnée. L'arc* BE *est la septième partie de la circonférence.* (Question 226, t. IX, p. 151 et 233; 1850.)

La construction de l'énoncé 1613 donnerait

$$x = \cos\frac{2\pi}{7} = \frac{5}{8};$$

celle du n° 226 donnerait

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$

La substitution

$$x = \frac{5}{8} \qquad \text{donne} \qquad \frac{1}{81}.$$

Notes. — 1. Sur le même sujet, voir *loc. cit.*, p. 51 et 279.

2. Viète a également indiqué une construction de l'ennéagone régulier (RITTER, *Ass. fr. Congrès de Montpellier*, p. 149; 1879).

Question 1562 [1].

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par M. P. SONDAT.

1 Les pascales

$$\left\{\begin{array}{l} bBb_1cCc_1, \\ aAa_1cCc_1, \\ aAa_1bBb_1, \end{array}\right. \qquad \text{savoir} \qquad \left\{\begin{array}{l} rr_1A_1, \\ rr_1B_1, \\ rr_1C_1, \end{array}\right.$$

ayant deux points communs se superposent, donc on a la droite $rr_1A_1B_1C_1$.

2 et 3. Comme on a

$$\left(\frac{aB}{aC}\,\frac{bC}{bA}\,\frac{cA}{cB}\right)\left(\frac{a_1B}{a_1C}\,\frac{b_1C}{b_1A}\,\frac{c_1A}{c_1B}\right) = +1,$$

puisque chacun des produits entre parenthèses est égal à -1, l'hexagone $abca_1b_1c_1$ est inscriptible dans une conique, d'où les nouvelles pascales

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} cabc_1a_1b_1 \\ cbac_1b_1a_1 \\ acba_1c_1b_1 \end{array}\right. \qquad \text{ou} \qquad \left\{\begin{array}{l} A_1B_2C_2, \\ B_1A_2C_2, \\ C_1A_2B_2. \end{array}\right.$$

---

[1] Voir l'énoncé, p. 13*.

Désignons par

$\lambda,\ \mu,\ \nu$ les points $(B_2C_2,\ bc)$, $(A_2C_2,\ ac)$, $(A_2B_2,\ ab)$,
$\lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1$ » $(B_2C_2,\ b_1c_1)$, $(A_2C_2,\ a_1c_1)$, $(A_2B_2,\ a_1b_1)$,
L, M, N » $(BC,\ B_2C_2)$, $(AC,\ A_2C_2)$, $(AB,\ A_2B_2)$,
I, H, K » $(BC,\ bc)$, $(AC,\ ac)$, $(AB,\ ab)$,
$I_1,\ H_1,\ K_1$ » $(BC,\ b_1c_1)$, $(AC,\ a_1c_1)$, $(AB,\ a_1b_1)$.

Il résulte des pascales

$$\left\{\begin{array}{l} cabBA_2C, \\ cbaAB_2C, \\ acbBC_2A, \end{array}\right. \quad \text{savoir} \quad \left\{\begin{array}{l} r\mu\nu, \\ r\lambda\nu, \\ r\lambda\mu, \end{array}\right.$$

que $\lambda\mu\nu$ est une droite passant par r, d'où le système homologique

$$(\text{centre } Q)\left|\begin{array}{ccc} A_2 & B_2 & C_2 \\ a & b & c \end{array}\right|(\text{axe } \lambda\mu\nu).$$

Il est évident qu'on a de même

$$(\text{centre } R)\left|\begin{array}{ccc} A_2 & B_2 & C_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{array}\right|(\text{axe } \lambda_1\mu_1\nu_1)$$

et que $\lambda_1\mu_1\nu_1$ passe par r_1.

En considérant le triangle $A_2B_2C_2$ comme coupé par les deux sécantes $\lambda\mu\nu$ et $\lambda_1\mu_1\nu_1$, on voit que les pascales

$$\left\{\begin{array}{l} \nu\mu_1\ B_2\mu\nu_1\ C_2, \\ \lambda\nu_1\ C_2\nu\lambda_1\ A_2, \\ \lambda\mu_1\ C_2\mu\lambda_1\ A_2, \end{array}\right.$$

forment un triangle inscrit dans $A_2B_2C_2$, et, comme ce triangle n'est autre que ABC, les points A, B, C appartiennent respectivement aux droites (1).

On a alors les pascales

$$\left\{\begin{array}{l} C_2A_2B_2bAc, \\ C_2R_2A_2aBc, \\ A_2C_2B_2bCa, \end{array}\right. \quad \text{savoir} \quad \left\{\begin{array}{l} QMN, \\ QLN, \\ QLM\,; \end{array}\right.$$

LMN est donc une droite passant par Q, et l'on a le système homologique

$$(\text{centre } O) \left| \begin{matrix} A & B & C \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix} \right| (\text{axe } LMN).$$

Les pascales

$$\left\{ \begin{matrix} CABB_2aC_2, \\ CBAA_2bC_2, \\ ACBB_2cA_2, \end{matrix} \right. \quad \text{savoir} \quad \left\{ \begin{matrix} OKH, \\ OIK, \\ OIH \end{matrix} \right.$$

montrent aussi que IHK est une droite passant par O.

On prouverait de même, en remplaçant a, b, c par a_1, b_1, c_1, que LMN passe par R et $I_1H_1K_1$ par O.

4. On voit par les hexagones

$$\left\{ \begin{matrix} a\ Qbb_1c_1a_1, \\ a_1Rb_1bc\ a, \end{matrix} \right.$$

dont les côtés opposés se coupent aux points A_2, B_2, C_2 en ligne droite, que la conique $abca_1b_1c_1$ passe par les points Q et R.

Il est évident que si les points r et r_1 sont, l'un l'orthocentre de ABC et l'autre le centre de gravité, cette conique devient le cercle des *neuf points*, qui passe de plus par les points Q et R.

Question 1560.

Trouver le rayon d'un cercle passant par les points dont les coordonnées trilinéaires sont

$$(-a, b, c)(a, -b, c)(a, b, -c).$$

(B. HANUMANTA RAU, B. A.)

SOLUTION.

Par M. BARISIEN.

Soit ABC le triangle de référence dont les côtés ont pour longueurs α, β, γ, et dont la surface est S.

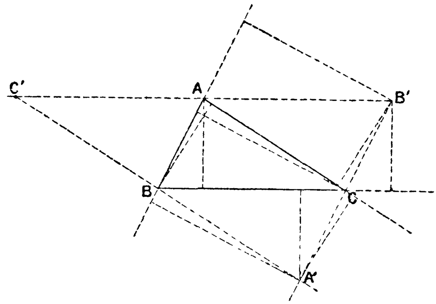
Nous avons les trois relations

$$\begin{aligned} -a\alpha + b\beta + c\gamma &= 2S, \\ a\alpha - b\beta + c\gamma &= 2S, \\ a\alpha + b\beta - c\gamma &= 2S, \end{aligned}$$

qui se réduisent à

$$a\alpha = b\beta = c\gamma = 2S.$$

ce qui indique que les longueurs a, b, c sont égales aux hauteurs du triangle de référence.



Si donc nous menons par les sommets A, B, C des parallèles aux côtés opposés, il est évident que les sommets A'B'C' du triangle ainsi formé ont respectivement pour coordonnées

$$\begin{aligned} &A', \quad (-a, b, c), \\ &B', \quad (-b, a, c), \\ &C', \quad (-c, a, b). \end{aligned}$$

Si R et R' sont les rayons des cercles circonscrits aux triangles ABC et A'B'C', on aura

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4S},$$

et comme, dans le triangle A'B'C', les côtés sont le double de ceux du triangle ABC, et la surface le quadruple, on aura aussi

$$R' = \frac{(2\alpha)(2\beta)(2\gamma)}{4(4S)} = \frac{\alpha\beta\gamma}{2S}.$$

Donc

$$R' = 2R,$$

ce qui indique que *le rayon du cercle passant par les points définis par l'énoncé est égal à deux fois le rayon du cercle circonscrit au triangle de référence.*

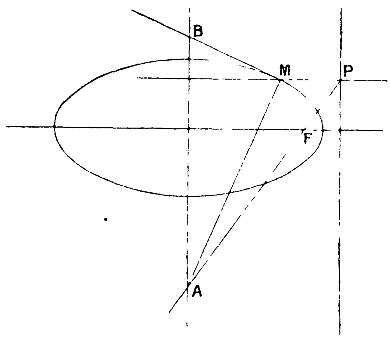
N. B. — M. Victor de Strélakof nous a envoyé une solution analogue.

Question 1612 (*voir* l'énoncé p. 35*).

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. Duporcq.

Soient A et B les points où l'axe non focal coupe respectivement la normale et la tangente au point M.



L'angle AFB étant, comme on sait, droit, la droite AF est conjuguée de la droite BF : elle passe donc par son pôle qui est évidemment la projection P de M sur la directrice correspondant au foyer F.

Question 1615.

A, B, C *étant trois points d'une conique, les parallèles menées par* C *aux tangentes en* A *et* B *coupent respectivement les rayons* OB *et* OA *issus du centre* O *aux points* D *et* E; *démontrer que* DE *est parallèle à la tangente en* C.

(W.-J. Greenstreat, M. A.).

SOLUTION

Par M. Duporcq.

La conique homothétique de la conique donnée par rapport au point C, qui passe par le centre O, passe évidemment aussi par les points d'intersection α et β des droites OE et CD, OD et CE. Il suffit d'appliquer le théorème de Pascal à l'hexagone inscrit $O\alpha CC\beta O$ pour vérifier que la droite DE est parallèle aux tangentes aux points O et C.

N. B. — MM. Brocard, Barisien et Lez nous ont envoyé une solution analytique de la même question.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1616. La tangente en un point de la développée d'une conique coupe cette développée en quatre points, outre le point de contact. Démontrer que les tangentes en ces points sont concourantes et se coupent sur le cercle décrit sur la distance focale pour diamètre. (ERNEST DUPORCQ.)

1617. Si les normales à une parabole aux points A, B, C concourent en un même point P, et que les normales PA, PB, PC rencontrent la parabole en A′, B′, C′, les cercles décrits sur PA′, PB′ et PC′ comme diamètres sont tangents respectivement à BC, CA, AB. En outre, si α, β, γ sont les points de contact correspondants, les droites $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ sont tangentes à la parabole en A′, B′, C′. (D'OCAGNE.)

1618. On donne trois points dans un plan divisant respectivement les trois côtés d'un triangle dans des rapports donnés $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, construire le triangle. (F. FARJON.)

1619. Si deux surfaces S et Σ se correspondent point par point, suivant une loi déterminée, et si o, a, b, c sont quatre points infiniment voisins de la première S et ω, α, β, γ les quatre points correspondants de la seconde Σ, on a les analogies

$$\frac{oa}{\sin boc} : \frac{\omega\alpha}{\sin\beta\omega\gamma} = \frac{ob}{\sin coa} : \frac{\omega\beta}{\sin\gamma\omega\alpha} = \frac{oc}{\sin aob} : \frac{\omega\gamma}{\sin\alpha\omega\beta}.$$

(E. ROUCHE.)

1620. En un point quelconque M d'une ellipse, on mène les rayons vecteurs focaux MF et MF' qui ont leurs seconds points de rencontre avec l'ellipse en P et P'. Montrer que :

1° Les cercles ayant pour diamètre FM, F'M, FP, F'P' sont tangents au cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre.

2° Le lieu du point de rencontre des tangentes communes extérieures aux cercles de diamètres FM et FP est une ligne droite.

3° Le lieu du point de rencontre des tangentes communes extérieures aux cercles de diamètre FM et F'M est une quartique. Montrer que la portion d'aire comprise entre la courbe et ses asymptotes est égale aux trois quarts de l'aire de l'ellipse. (Barisien.)

QUESTIONS RÉSOLUES (1).

Question 1593.

Si l'on appelle O *et* R *le centre et le rayon du cercle circonscrit à un triangle* ABC, I *et* r *le centre et le rayon du cercle inscrit,* H *l'orthocentre,* a, b, c *les côtés,* $2p$ *le périmètre et* S *la surface du triangle* OIH $(a > b > c)$:

1° *On a*

$$S = 2R^2 \sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{A-B}{2},$$

$$S = \frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{8r},$$

$$16S^2 = -p^4 + 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 - r(4R+r)^3.$$

2° *Si* I' *et* r' *sont le centre et le rayon du cercle ex-inscrit dans l'angle intérieur* A *et* S' *la surface du triangle* OI'H,

(1) M. Barisien a adressé une solution de la question 1613. C'est par erreur que son nom a été omis à la suite de la solution donnée dans le précédent numéro, p. 37*.

on a aussi

$$S' = 2R^2 \sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{A-C}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

$$S' = \frac{(b-c)(a+c)(a+b)}{8r'},$$

$$S + S' = R^2 \sin(B-C).$$

3° *La condition*

$$p^4 - 2(R^2 + 10Rr - r^2)p^2 + r(4R+r)^3 \leqq 0$$

exprime que le triangle ABC *est possible avec les éléments* p, R, r. (R. SONDAT.)

SOLUTION,

Par M. E. LEMOINE.

Les coordonnées normales absolues de O, I, H sont respectivement

$$R\cos A, \quad R\cos B, \quad R\cos C;$$

$$r, \quad r, \quad r;$$

$$2R\cos B\cos C, \quad 2R\cos C\cos A, \quad 2R\cos A\cos C.$$

On aura donc, en appelant T l'aire CBA,

$$\text{aire OIH} = S = -\frac{R}{2T}\begin{vmatrix} R\cos A & R\cos B & R\cos C \\ r & r & r \\ 2R\cos B\cos C & 2R\cos C\cos A & 2R\cos A\cos B \end{vmatrix},$$

d'où

$$S = \frac{Rr}{4T}\left[a\cos A(c-b) + b\cos B(a-c) + c\cos C(b=a)\right],$$

d'où

$$S = \frac{r}{32T^2}\left[a^2(b^2+c^2-a^2)(c-b) + b^2(c^2+a^2-b^2)(a-c) + c^2(a^2+b^2-c^2)(b-a)\right]:$$

il est facile de mettre, dans le polynôme entre crochets, $b-c$, $a-c$, $a-b$ en facteurs, et l'on aura alors

$$S = \frac{r}{32T^2}4p^2(b-c)(a-c)(a-b) = \frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{8r}.$$

Au moyen des valeurs de $\sin\frac{B}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$, ... en fonction des côtés, on a facilement

$$\sin\frac{B-C}{2}=\frac{1}{a}\frac{\sqrt{p(p-a)}}{bc}(b-c),$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$2R^2\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{A-B}{2}=\frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{8r}.$$

L'équation

$$X^3-(a+b+c)X^2+(bc+ca+ab)X-abc=0,$$

qui peut s'écrire

$$(1)\qquad X^3-2pX^2+[p^2+r(4R+r)]X-4pRr=0,$$

a évidemment a, b, c pour racines.

Le dernier terme de l'équation aux carrés des différences de cette équation est

$$-4[p^2r^2(4R^2+20Rr-2r^2-p^2)-r^3(4R+r)^3],$$

il est aussi

$$-(b-c)^2(a-c)^2(a-b)^2;$$

on en déduit

$$16S^2=-p^4+2(rR^2+10Rr-r^2)p^2-r(4R+r)^3.$$

En suivant exactement la même marche, on obtiendrait

$$S'=\frac{(b-c)(a+c)(a+b)}{8r}$$

et

$$S'=2R^2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{A-C}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

Enfin on a

$$S+S'=2R^2\sin\frac{B-C}{2}\left(\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A-C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)$$

ou

$$S+S'=2R^2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=R^2\sin(B-C).$$

Ajoutons à l'énoncé qu'on obtiendrait aussi l'équation

$$(2)\quad 16S'^2 = -(p-a)^4 + 2(2R^2 - 10Rr' - r'^2)(p-a)^2 + r'(4R - r')^3$$

en suivant la même marche que pour obtenir $16S^2$, mais en employant, au lieu de l'équation (1), l'équation

$$\begin{aligned}&X^3 + 2(p-a)X^2\\&\quad + [(p-a)^2 - r'(4R - r')]X - 4(p-a)Rr' = 0,\end{aligned}$$

qui a pour racines a, $-b$, $-c$.

Considérons l'équation

$$X^3 - pX^2 + r(4R + r)X - pr^2 = 0;$$

elle a pour racines $p-a$, $p-b$, $p-c$.

Or, comme p, r, R sont positifs, cette équation ne peut avoir de racines négatives; donc, si toutes ses racines sont réelles, c'est-à-dire si l'on a, d'après la condition de réalité des racines de l'équation du troisième degré,

$$p^4 - 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 + r(4R + r)^3 \leqq 0.$$

On pourra former un triangle avec les racines p, R, r, puisque, $p-a$, $p-b$, $p-c$ étant positifs, un côté quelconque sera plus petit que la somme des deux autres.

De même, la condition pour qu'il y ait effectivement un triangle avec les données R, r', $(p-a)$ est

$$(p-a)^4 - 2(2R^2 - 10Rr' - r'^2)(p-a)^2 - r'(4R - r')^3 \leqq 0.$$

Remarque. — Si S'' et S''' sont les aires des triangles OI''H, OI'''H, I'' et I''' étant les centres des cercles existants dans les angles intérieurs B et C, on aura

$$S + S' + S'' + S''' = 0.$$

La condition

$$p^4 - 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 + r(4R + r)^3 < 0$$

exprime que l'équation

$$X^3 - 2pX^2 + [p^2 + r(4R + r)]X - 4Rpr = 0$$

a ses trois racines réelles; on voit facilement qu'elles sont toutes trois positives.

Appelons-les a, b, c, et soit a la plus grande et c la plus petite.

Pour qu'il y ait effectivement un triangle qui puisse être formé avec a, b, c, il suffira que l'on ait $a < b + c$ ou que

$$(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$$

soit positif.

Mais ce produit peut s'écrire

$$4(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - (a^2 + b^2 + c^2)^2,$$

ou, en remarquant que ces fonctions symétriques sont égales respectivement à

$$4[p^2 - r(4R + r)]^2 + 16p^2r^2,$$

et à

$$4[p^2 - r(4R + r)]^2,$$

ce produit est

$$16p^2r^2$$

toujours positif. C. Q. F. D.

Si

$$p^4 - 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 + r(4R + r)^3 = 0,$$

le triangle est isoscèle.

N. B. — M. Alexander Andersen, professeur au Collège Royal de Galway (Irlande), nous a envoyé une solution analogue.

Question 1611.

On donne deux faisceaux de coniques, et l'on demande le lieu des points où une conique de l'un des faisceaux touche les diverses coniques de l'autre faisceau.

(Darboux.)

SOLUTION,

Par M. Barisien.

Les équations d'une conique de chaque faisceau peuvent s'écrire

(1) $$C = S + \lambda T = 0,$$

(2) $$C_1 = S_1 + \lambda_1 T_1 = 0,$$

dans lesquelles λ et λ_1 sont des paramètres variables, et où

$$\begin{aligned}
S\ &= Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F,\\
T\ &= ax^2 + \ldots + f,\\
S_1 &= A_1x^2 + \ldots + F_1,\\
T_1 &= a_1x^2 + \ldots + f_1.
\end{aligned}$$

Pour avoir le lieu des points de contact de deux coniques (1), (2), il faut éliminer λ_1 et λ_2 entre les équations (1) et (2) et la suivante

$$(3) \qquad \frac{C'_x}{C'_y} = \frac{C'_{1x}}{C'_{1y}},$$

C'_x et C'_y désignant les dérivées de C par rapport à x et à y. En effet, désignons par

$$(4) \qquad D = 0$$

l'équation de la tangente, laquelle contiendrait les paramètres λ et λ_1. Une conique quelconque, tangente à la droite D au même point que la conique C, a pour équation $C + \mu D = 0$. Exprimons que cette conique est un système de deux droites dont le point de concours, c'est-à-dire le centre, est à la fois sur C et sur D. Les équations du centre sont

$$C'_x + \mu D'_x = 0, \qquad C'_y + \mu D'_y = 0,$$

d'où

$$(5) \qquad \frac{C'_x}{C'_y} = \frac{D'_x}{D'_y}.$$

Il faudrait donc éliminer λ et λ_1 entre les équations (1), (4) et (5). En appliquant le même raisonnement à la conique C, on aura aussi la relation

$$(6) \qquad \frac{C'_{1x}}{C'_{1y}} = \frac{D'_x}{D'_y},$$

et la comparaison de (5) et (6) donne bien la relation (3).

Cela posé, écrivons l'équation (3) sous la forme

$$\frac{S'_x + \lambda T'_x}{S'_y + \lambda T'_y} = \frac{S'_{1x} + \lambda_1 T'_{1x}}{S'_{1y} + \lambda_1 T'_{1y}}.$$

En y remplaçant λ et λ_1 par les valeurs

$$\lambda = -\frac{S}{T}, \qquad \lambda_1 = -\frac{S_1}{T_1},$$

tirées de (1) et (2), on a, pour l'équation du lieu demandé,

$$\frac{TS'_x - ST'_x}{TS'_y - ST'_y} = \frac{T_1 S'_{1x} - S_1 T'_{1x}}{T_1 S'_{1y} - S_1 T'_{1y}}. \tag{7}$$

C'est une courbe du sixième ordre, qui passe par :

Les 4 points d'intersection des coniques

$$S = 0, \qquad T = 0;$$

les 4 points d'intersection des coniques

$$S_1 = 0, \qquad T_1 = 0;$$

les 9 points d'intersection des cubiques

$$TS'_x - ST'_x = 0, \qquad TS'_y - ST'_y = 0;$$

les 9 points d'intersection des cubiques

$$TS'_x - ST'_x = 0, \qquad T_1 S'_{1x} - S_1 T'_{1x} = 0;$$

les 9 points d'intersection des cubiques

$$T_1 S'_{1y} - S_1 T'_{1y} = 0, \qquad TS'_y - ST'_y = 0;$$

les 9 points d'intersection des cubiques

$$T_1 S'_{1y} - S_1 T'_{1y} = 0, \qquad T_1 S'_{1x} - S_1 T'_{1x} = 0;$$

en tout, 44 points.

Une cubique telle que $TS'_x - ST'_x = 0$ passe par :

les 2 points d'intersection de la droite $S'_x = 0$ et de la conique $S = 0$;
les 2 points d'intersection de la droite $T'_x = 0$ et de la conique $T = 0$;
le point de rencontre des deux droites $S'_x = 0$ et $T'_x = 0$;
les 4 points de rencontre des coniques $S = 0$ et $T = 0$;

en tout 9 points.

Remarque. — La quatrième partie de la question proposée au Concours d'agrégation, en 1891, résulte immédiatement de la formule (7).

Question 1610.

Trouver le lieu du pied des normales abaissées d'un point donné sur les coniques d'un faisceau. (DARBOUX.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. le capitaine E. MALO.

Pour avoir l'ordre du lieu, il suffit de compter exactement le nombre des points du lieu qui se trouvent sur une des coniques de l'énoncé.

Or, sur une telle conique, il y a évidemment quatre points du lieu qui résultent du choix particulier auquel on s'est arrêté; s'il en existe d'autres, ils sont les pieds des normales abaissées du point fixe O sur d'autres coniques du faisceau; par conséquent, ils ne peuvent se trouver qu'aux points A, B, C, D, communs à toutes les coniques, et il est clair que chacun des points A, B, C, D doit être compté une fois, et une seule, car, si l'on joint OA, par exemple, la perpendiculaire AT est déterminée, ainsi que la conique du faisceau admettant AT comme tangente; il est non moins clair que la tangente au lieu en A est AT.

Puisque huit points du lieu se trouvent sur une conique quelconque du faisceau, l'ordre est 4 : en d'autres termes, le lieu est une *quartique*.

On a déjà reconnu quatre points de passage obligés pour cette quartique : il est facile d'en reconnaître quatre autres à distance finie, ainsi que les quatre qui sont à l'infini.

Parmi les premiers se trouvent d'abord le point O lui-même et la direction de la tangente en ce point est évidente : c'est la normale en O à la conique du faisceau qui passe par O. Ensuite il est clair que les sommets P, Q, R du triangle autopolaire commun à toutes les coniques du faisceau, c'est-à-dire les points doubles des coniques évanouissantes du faisceau, font partie du lieu. En effet, en ces points, la direction de la tangente est indéterminée, et, par suite, OP, par exemple, peut être considérée comme normale.

Les directions des tangentes à la quartique aux points P, Q, R sont aisées à reconnaître. Il suffit pour cela, considérant, par exemple, le point P et les points infiniment voisins, d'examiner cette région pour ainsi dire au microscope avec un grossissement indéfiniment croissant. Les coniques de l'énoncé comprises dans la région envisagée se présentent alors comme des coniques concentriques et homothétiques, et le lieu demandé comme celui du pied des normales *parallèles* à une direction fixe, c'est-à-dire comme le lieu des points de contact des tangentes parallèles à la direction perpendiculaire : c'est le diamètre conjugué à celle-ci. Donc, revenant à la figure primitive, on tirera OP et la perpendiculaire PS, puis on prendra la droite conjuguée de PS par rapport à l'angle APB.

Des points à l'infini deux sont réels, deux imaginaires. Les deux réels appartiennent aux deux paraboles comprises dans le faisceau; les deux imaginaires sont les points cycliques ω, ω'. En effet, la droite isotrope $O\omega$, pouvant être considérée comme perpendiculaire à toute droite isotrope de la même série, peut en particulier être regardée comme normale en ω à la conique $(ABCD\omega)$.

Un problème voisin par son énoncé du présent problème, et auquel on a même déjà fait allusion chemin faisant, est celui de « trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné O aux coniques du faisceau ABCD ». On sait que ce lieu est une cubique passant par les points A, B, C, D, O et y admettant comme tangentes les droites OA, OB, OC, OD et la tangente à la conique du faisceau qui passe par O. La cubique en question et la quartique précédente sont donc rectangulaires en ces cinq points qui leur sont communs. Les trois points P, Q, R appartiennent également aux deux courbes; mais elles ne s'y coupent point à angle droit, car la tangente à la cubique en P est, comme on l'a remarqué, la conjuguée par rapport à l'angle APB de la droite OP, conjuguée qui n'est généralement pas perpendiculaire à la conjuguée, par rapport au même angle APB, de la droite PS perpendiculaire à OP.

Les quatre derniers points communs à la cubique et à la quartique sont sur les droites isotropes $O\omega$, $O\omega'$: ils sont, par conséquent, toujours imaginaires.

Sauf relation de position spéciale entre les points A, B, C, D, O, ni la cubique ni la quartique n'admettent évidemment de singularités ponctuelles.

TABLE DES MATIÈRES DES EXERCICES.

Questions proposées.

	Pages
Questions 1595 à 1600	1*
Questions 1601 à 1602	5*
Questions 1603 à 1608	10*
Questions 1609 à 1615	24*
Questions 1616 à 1620	42*

Questions résolues.

Question 1398, par M. *H. Brocard*	6*
Question 1452, par M. *H. Brocard*	7*
Question 1477, par M. *Lemaire*	3*
Question 1550, par M. *H. Brocard*	12*
Question 1553, par M. *H. Brocard*	18*
Question 1558, par M. *H. Brocard*	7*
Question 1560, par M. *Barisien*	39*
Question 1562, par MM. *Lez* et *P. Sondat*	13* et 37*
Question 1575, par M. *Servais*	4*
Question 1577, par M. *Servais*	8*
Question 1578, par MM. *Servais* et *Lemaire*	9*
Question 1581, par M. *Lemaire*	18*
Question 1587, par M. *Bosi*	22*
Question 1593, par M. *E. Lemoine*	43*
Question 1594, par MM. *L. Lemoine, A. Andersen, J. Champion, Baudiau* et *de Montille*	2*
Question 1595, par M. *R. de Cres*	11*
Question 1598, par M. *Audibert*	27*
Question 1602, par MM. *E. Lemoine* et *Greenstreet*	30* et 31*
Question 1603, par MM. *G. Darboux, Barisien* et *Lemoine*	20*, 22* et 23*
Question 1605, par M. *Lemaire*	28*
Question 1606, par M. *Bardelli*	29*
Question 1607, par M. *Dertoux*	31*
Question 1608, par M. *Dertoux*	32*
Question 1610, par MM. *Barisien* et *E. Malo*	34* et 50*
Question 1611, par M. *Barisien*	47*
Question 1612, par MM. *H. Brocard* et *Duporcq*	35* et 41*
Question 1613, par M. *H. Brocard*	36*
Question 1615, par M. *Duporcq*	41*

16881 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.