M. D'OCAGNE

Sur une courbe définie par la loi de sa rectification

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 82-90
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__82_1>

SUR UNE COURBE DÉFINIE PAR LA LOI DE SA RECTIFICATION;

PAR M. M. D'OCAGNE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. Quand on observe le petit nombre des courbes classiques dont l'arc est exprimable au moyen des fonctions élémentaires, voire des fonctions elliptiques, ou même, en général, le peu de simplicité de cette expression quand elle est possible, on est tenté de rechercher quelles sont les courbes qui présentent les lois de rectification les plus simples.

Une idée qui se présente tout naturellement, pour préciser la question, consiste à faire correspondre à chaque point de la courbe un point d'une droite, suivant une loi géométrique simple, et à déterminer la courbe par la condition que l'arc compris entre deux points de cette courbe soit égal au segment compris entre les points correspondants de la droite.

C'est cette idée qui a déjà donné naissance à nos recherches sur les courbes que nous avons appelées *isométriques de droites* (1).

La loi de correspondance la plus simple consiste à placer les points correspondants sur des droites concourantes. C'est à ce cas que sont consacrés le n° 5 de notre première Note (2) et la seconde tout entière.

2. Nous allons ici examiner un nouveau cas qui présente l'intérêt de pouvoir être traité géométriquement.

Établissons entre les points de la courbe cherchée et les points de la droite que nous nous donnons le mode de correspondance ainsi défini : *La distance entre les points correspondants est constante.*

Soient B un point pris sur la courbe cherchée, A le point correspondant de la droite d donnée ; AB étant de longueur constante, si la normale en B à la courbe c coupe au point N la perpendiculaire élevée en A à la droite d, N est le centre instantané de rotation de AB et on a le point P où AB touche son enveloppe en abaissant de N la perpendiculaire NP sur AB. Or, si $d(\mathrm{B})$ et $d(\mathrm{A})$ sont les différentielles des arcs décrits par les points B et A, on a

$$\frac{d(\mathrm{B})}{d(\mathrm{A})} = \frac{\mathrm{NB}}{\mathrm{NA}};$$

(1) *Bulletin de la Société mathématique,* t. XIII, p. 71, et t. XVII, p. 171.

(2) A l'endroit cité, pour les expressions (7), (8) et (9) de y, on doit, dans le second terme de la parenthèse, remplacer x par $\frac{x}{u}$.

et puisque, par hypothèse, ces arcs doivent être égaux, on a

$$NB = NA.$$

Le triangle NBA étant isoscèle, le point P est le milieu de AB et PA est constant. Il s'ensuit que l'enveloppe de AB ou le lieu de P est une *tractrice t* ayant la droite *d* pour asymptote. La courbe cherchée, qui est le lieu du point B, s'obtient donc ainsi : *Prendre, sur chaque tangente à une tractrice, le symétrique, par rapport au point de contact, du point où cette tangente coupe l'asymptote de la courbe.*

La courbe ainsi obtenue appartient à la catégorie de celles que M. Sylvester appelle *syntractrices* (¹).

Le problème se trouve ainsi résolu. Remarquons en passant que notre courbe est celle qu'on doit faire décrire à l'extrémité d'une bielle, dont l'autre extrémité est articulée à une tige animée d'un mouvement rectiligne, pour qu'à chaque instant les deux extrémités de la bielle aient même vitesse, en grandeur.

3. Cette courbe peut encore se déduire de la tractrice, en ne faisant intervenir que les points de celle-ci et non ses tangentes.

A cet effet, O étant un point fixe quelconque de la droite d, prenons le symétrique Q de O par rapport à P, puis le symétrique C de Q par rapport à B. Puisque $OQ = 2OP$, le lieu du point Q est homothétique à celui du point P par rapport au point O ; c'est donc une tractrice θ. D'ailleurs, le point P étant à la fois le milieu de AB et le milieu de OQ, QB est parallèle et égal à OA, et il en est de même de BC. Par suite, $OC = AB$ et le

(¹) SALMON, *Courbes planes*, traduction Chemin, p. 405.

lieu du point C est un cercle γ de centre O et de rayon égal à AB.

Ainsi, *la courbe cherchée c est le lieu du milieu d'un segment de droite parallèle à l'asymptote d'une tractrice* θ, *et dont les extrémités s'appuient d'une part sur cette tractrice, de l'autre sur un cercle* γ *ayant son centre sur l'asymptote et un rayon égal à la tangente constante de la tractrice.*

On doit associer les points du cercle γ et de la tractrice θ de façon qu'aux extrémités du segment de droite QC les convexités des deux courbes soient de même sens.

On peut dire plus simplement que *la courbe cherchée est la courbe moyenne* (1) *de la tractrice* θ *et du cercle* γ *relativement à la direction de l'asymptote de la tractrice.*

4. Ce mode de génération résulte immédiatement d'un théorème général obtenu dans notre première Note sur les isométriques de droite (2).

En effet, si du point A comme centre on décrit avec AB pour rayon un cercle qui coupe la droite d en B_1, l'arc BB' de la courbe étant, par hypothèse, égal au segment de droite AA', l'est aussi au segment $B_1 B'_1$. Par suite, la courbe cherchée est isométrique de la droite d par rapport au système formé par les cercles de rayon AB, c'est-à-dire par les positions successives du cercle ci-dessus désigné par γ lorsque son centre décrit la droite d.

Donc, en vertu du théorème général auquel nous venons de faire allusion, on aura la courbe cherchée en

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XIII, p. 74.
(2) *Ibid.*, p. 73 et 74.

prenant la courbe moyenne du cercle γ et d'une quelconque des trajectoires orthogonales du système qui vient d'être défini, c'est-à-dire de la tractrice θ.

On retrouve ainsi le résultat énoncé au numéro précédent.

5. Voici encore quelques propriétés géométriques de la courbe qui nous occupe.

La détermination de son centre de courbure résulte d'un théorème que nous avons fait connaître dernièrement (¹) et que nous rappelons ici :

Si en chaque point P *d'une courbe quelconque on porte sur la tangente, de part et d'autre du point* P, *des longueurs égales et constantes* PA *et* PB, *les centres de courbure des lieux décrits par les points* A *et* B *sont en ligne droite avec le point* P.

L'application de ce théorème au cas qui nous occupe montre que *le centre de courbure* Ω *répondant au point* B *est le milieu de la distance du point* B *au centre de courbure correspondant* N *de la tractrice* θ.

6. Occupons-nous maintenant de l'aire de la courbe. Prenons, à cet effet, pour centre O du cercle γ le point où la tangente au point de rebroussement R de la tractrice θ rencontre l'asymptote d de cette courbe.

Puisque le milieu du segment QC parallèle à d se trouve sur la courbe c, le double de l'aire comprise entre la courbe c, la droite OR et la droite QC est égal à l'excès du demi-segment de cercle RKC sur l'aire comprise entre les mêmes droites et la tractrice θ. On a

(¹) *Association française pour l'avancement des Sciences*, 1889.

donc

$$\begin{aligned} 2\,\text{aire}\,\mathrm{RKB} &= \text{aire}\,\mathrm{RKC} - \text{aire}\,\mathrm{RKQ} \\ &= \text{aire}\,\mathrm{RKC} - (\text{aire}\,\mathrm{RO}q\mathrm{Q} - \text{aire}\,\mathrm{KO}q\mathrm{Q}). \end{aligned}$$

Mais nous avons fait voir ([1]) que

$$\text{aire}\,\mathrm{RO}q\mathrm{Q} = \text{aire}\,\mathrm{RKC}.$$

Il vient donc

$$2\,\text{aire}\,\mathrm{RKC} = \text{aire}\,\mathrm{KO}q\mathrm{Q}.$$

Or, si M est le milieu de KC, on a

$$\mathrm{BM} = \frac{\mathrm{KC}}{2} - \mathrm{KB} = \frac{\mathrm{KC}}{2} - \frac{\mathrm{KC} - \mathrm{KQ}}{2} = \frac{\mathrm{KQ}}{2}.$$

Par suite,

$$2\,\text{aire}\,\mathrm{M}mb\mathrm{B} = \text{aire}\,\mathrm{KO}q\mathrm{Q},$$

et

$$\text{aire}\,\mathrm{RKB} = \text{aire}\,\mathrm{M}mb\mathrm{B}.$$

Lorsque le point K est au-dessous du point D de la courbe c, le rectangle MmbB représente la différence comprise entre la demi-boucle RD et le triangle mixtiligne formé par les droites OR et QC et la courbe c. Cette différence tend vers zéro lorsque QC tend vers l'asymptote. En d'autres termes, *l'aire comprise dans la boucle de la courbe c est égale à l'aire comprise entre cette courbe et son asymptote.*

7. Soient AB et A′B′ deux positions infiniment voisines de AB, se rencontrant en P. Elles coupent la courbe c respectivement en M et en M′. Appelons σ l'aire comprise entre AB et la concavité de la courbe c, σ_1 l'aire comprise entre AB, la convexité de la courbe c

([1]) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1884, p. 554, et brochure *Coordonnées parallèles et axiales*, p. 45.

et l'asymptote de cette courbe. Nous avons

$$d\sigma = \text{aire}\,\mathrm{MPM'} - \text{aire}\,\mathrm{PBB'},$$
$$d\sigma_1 = -\,\text{aire}\,\mathrm{AMM'A'}.$$

Donc

$$\begin{aligned} d\sigma - d\sigma_1 &= \text{aire}\,\mathrm{MPM'} - \text{aire}\,\mathrm{PBB'} + \text{aire}\,\mathrm{AMM'A'} \\ &= \text{aire}\,\mathrm{PAA'} - \text{aire}\,\mathrm{PBB'}. \end{aligned}$$

Mais les triangles PAA' et PBB' sont équivalents, aux infiniment petits d'ordre supérieur près. Par suite,

$$d\sigma - d\sigma_1 = 0,$$

et la différence $\sigma - \sigma_1$ est constante. Or nous venons de démontrer que cette différence est nulle lorsque AB coïncide avec OR. Donc

$$\sigma - \sigma_1 = 0,$$

c'est-à-dire que *l'aire comprise entre une position quelconque de la droite* AB *et la concavité de la courbe c est égale à l'aire comprise entre la droite* AB, *la convexité de la courbe c et l'asymptote de cette courbe.*

8. Revenant au problème général défini au n° 1 de cette Note, nous ferons remarquer que la solution de ce problème se ramène toujours à une quadrature lorsque la position du point A de la droite d, correspondant au point B de la courbe, ne dépend que de la projection du point B sur la droite d.

En effet, en prenant la droite d pour axe des x, on voit que l'équation différentielle du problème s'écrit alors

$$dx^2 + dy^2 = [\varphi'(x)\,dx]^2;$$

et l'on a

$$y = \int \sqrt{\overline{\varphi'(x)}^2 - 1}\,dx.$$

9. Le problème se ramène encore à une quadrature lorsque la distance du point A au pied b de la perpendiculaire abaissée de B sur la droite d ne dépend que de la distance Bb du point B à cette droite. Mais, dans ce cas, la solution peut revêtir une forme géométrique remarquable.

Posons, en tenant compte du signe, $b\mathrm{A} = u$, et supposons que cette longueur soit liée à l'ordonnée $b\mathrm{B} = y$ par la relation

$$\varphi(u, y) = 0.$$

Prenons le point A comme origine des coordonnées, l'axe des X étant confondu avec la droite d parcourue dans le sens positif, l'axe des Y étant perpendiculaire au premier, et considérons la courbe dont l'équation est

$$\varphi(-\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0.$$

Cette courbe s coupera la courbe cherchée c au point B et la droite d en un certain point M.

Lorsqu'on passera d'un point à un autre point B de la courbe c, la courbe s glissera parallèlement à d, sans changer de forme, en engendrant un système (s), et la distance MA restera constante. Mais les segments parcourus par A sont, par hypothèse, égaux aux arcs correspondants décrits par B; il en est de même des segments parcourus par M, et la courbe cherchée est *isométrique de la droite d par rapport au système* (s).

Donc, en vertu du théorème général rappelé plus haut, la courbe cherchée est moyenne par rapport à la direction de la droite d de la courbe s prise dans une quelconque de ses positions, et d'une quelconque des trajectoires orthogonales du système (s), lesquelles sont elles-mêmes les positions successives d'une même courbe t glissant parallèlement à d.

On a ainsi la généralisation de la solution donnée au n° 4.

On peut, pour simplifier le langage, dire que les courbes s et t sont *conjuguées orthogonales par rapport à la direction de la droite d*.

Le résultat précédent s'énoncera dès lors ainsi :

Si, en appelant b la projection de B *sur la droite d, et posant* $bB = y$, $bA = u$, *on définit le mode de correspondance entre les points* A *et* B *par la relation* $\varphi(u, y) = 0$, *on obtient la courbe cherchée en prenant la courbe moyenne, par rapport à la direction de la droite d de la courbe* $\varphi(-x, y) = 0$ *et de sa conjuguée orthogonale suivant cette direction.*

Si la relation φ a la forme $u^2 + y^2 = R^2$, on retombe sur le cas auquel a été consacrée la présente Note.

Si elle a la forme $y = \frac{A}{h} u^h$, A étant une constante, la courbe cherchée est

$$y = \frac{(-1)^h}{2}\left[\frac{A}{h} x^h + \frac{1}{A(h-2)x^{h-2}}\right].$$

On reconnaît là l'équation de la *courbe de poursuite* lorsque le point poursuivi décrit l'axe des x et que le rapport de sa vitesse à celle du point poursuivant est égal à $h - 1$. Lorsque $h = 2$, on retrouve le cas traité au n° 3 de notre première Note, pour lequel le second terme de la parenthèse devient égal à $-\frac{\log x}{A}$.