NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LUCIEN LÉVY

Intersection de deux quadriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 65-76

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__65_0>

INTERSECTION DE DEUX QUADRIQUES;

Par M. Lucien LÉVY.

Dans le numéro des *Nouvelles Annales* de décembre 1890, M. Carvallo a publié un intéressant article où il a l'occasion d'appliquer une méthode de M. Darboux à la recherche des conditions de contact de deux quadriques. La méthode indiquée me paraît plus puissante qu'il ne semble résulter de l'article cité et je voudrais montrer qu'elle permet une discussion complète de l'équation en λ relative à deux quadriques, au moins si l'on fait abstraction du réel et de l'imaginaire. Je retrouverai ainsi tous les résultats obtenus par Painvin (voir *Nouvelles Annales*, 1868 et 1869).

Pour abréger, je conserverai les notations de M. Carvallo et je renverrai, au besoin, à sa Note.

Soient

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} S &= \varphi(x, y, z, t) \\ &= \alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 + 2\beta yz + 2\beta' zx \\ &\quad + 2\beta'' xy + 2\gamma x + 2\gamma' y + 2\gamma'' z + \delta = 0. \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} S' &= f(x, y, z, t) \\ &= Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx \\ &\quad - 2B''xy + 2(x + 2C'y - 2C''z + D) = 0 \end{aligned}\right.$$

les équations de deux surfaces de second ordre (S) et (S');

$$(3)\qquad f(x, y, z, t) + \lambda\varphi(x, y, z, t) = 0$$

l'équation générale des quadriques qui passent par leurs intersections;

$$(4)\qquad \Delta(\lambda) = 0$$

l'équation du quatrième degré en λ qui exprime que l'équation (3) représente un cône.

Si le déterminant $\Delta(\lambda)$ est nul sans que tous ses mineurs du premier ordre le soient, l'équation (3) représentera un cône ou un cylindre non décomposables.

Si les premiers mineurs de $\Delta(\lambda)$ sont nuls sans que tous les mineurs du second ordre le soient, l'équation (3) représentera un système de deux plans distincts, parallèles ou non, réels ou imaginaires.

Si les mineurs du second ordre de $\Delta(\lambda)$ sont nuls sans que les éléments de $\Delta(\lambda)$ le soient tous, l'équation (3) représentera deux plans confondus.

Enfin si les éléments de $\Delta(\lambda)$ sont tous nuls pour la valeur de λ considérée, l'équation (3) est indéterminée.

Nous considérerons successivement ces diverses hypothèses. Cela posé, la méthode de M. Darboux repose essentiellement sur le lemme suivant dont j'omettrai la démonstration :

Si l'on remplace les deux surfaces S *et* S' *d'un faisceau de quadriques par deux autres surfaces* Σ *et* Σ' *du même faisceau, l'équation en* μ *(qui exprime que le discriminant de* $\Sigma + \mu\Sigma'$ *est nul) a ses racines reliées par une relation homographique à celles de l'équation en* λ *provenant de la forme* $S + \lambda S'$.

Il en résulte que les équations en λ et en μ acquerront en même temps une ou deux racines doubles, une racine triple, une racine quadruple, et que l'on peut choisir les surfaces S et S' qui servent de bases au faisceau, sans que l'intersection ni la nature des racines de l'équation en λ en soient affectées.

I.

$\Delta(\lambda)$ EST NUL SANS QUE TOUS SES PREMIERS MINEURS LE SOIENT.

Les quatre cônes qui correspondent à chaque valeur de λ sont tous de véritables cônes ou des cylindres. Je supposerai que la surface (1) soit un de ces cônes : par suite, l'équation en λ aura une racine nulle. Si, conformément aux notations usuelles (SALMON, *Géométrie analytique à trois dimensions*, § 234), nous posons

$$\Delta(\lambda) = \Delta\lambda^4 - \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 - \Theta'\lambda + \Delta',$$

l'équation (4) s'écrira

$$(5) \qquad \Delta\lambda^4 - \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 - \Theta'\lambda = 0.$$

a. THÉORÈME I. — *A toute racine simple de cette équation correspond un cône n'ayant pas son sommet sur une quadrique du faisceau.*

D'après le lemme cité plus haut, on peut supposer que cette racine simple soit la racine nulle. Le cône correspondant a pour équation

$$(1) \qquad f(x, y, z, t) = 0.$$

Les coordonnées x_1, y_1, z_1, t_1 de son sommet vérifient les égalités (*voir* l'article de M. Carvallo)

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial A}\right)} = \frac{y_1^2}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial A'}\right)} = \frac{z_1^2}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial A''}\right)} = \frac{2x_1y_1}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial B''}\right)} = \frac{2z_1x_1}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial B'}\right)}$$

$$= \frac{2y_1z_1}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial B}\right)} = \frac{2x_1t_1}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial C}\right)} = \frac{2y_1t_1}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial C'}\right)} = \frac{2z_1t_1}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial C''}\right)} = \frac{t_1^2}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial D}\right)},$$

et l'on a

$$\left[\frac{\partial\Delta(\lambda)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=0} = -\Theta' = \varphi(x_1, y_1, z_1, t_1).$$

Si la racine nulle est simple, Θ' n'est pas nul et le point $x_1 y_1 z_1 t_1$ n'est pas sur la surface (S). Mais la démonstration suppose que la surface (S') est un véritable cône [1] : il faut la modifier pour le cas où elle serait un cylindre. Dans ce cas, soit

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1},$$

une parallèle à l'axe de cylindre, on vérifie aisément les égalités

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial A}\right)} = \frac{y_1^2}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial A'}\right)} = \frac{z_1^2}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial A''}\right)} = \frac{2x_1y_1}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial B''}\right)} = \frac{2z_1x_1}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial B'}\right)} = \frac{2y_1z_1}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial B}\right)}.$$

Si nous appelons alors $\varphi'(x, y, z)$ l'ensemble des termes du second degré en x, y, z de la fonction $\varphi(x, y, z, t)$, nous aurons

$$-\Theta' = \varphi'(x_1, y_1, z_1).$$

Cette expression n'est donc nulle que si la surface (S) a une génératrice (réelle ou imaginaire) parallèle à l'axe du cylindre (S'). Ce cas, par une extension de langage connue, rentre donc dans le précédent [2].

Donc, si toutes les racines de l'équation en λ sont

---

[1] On se contente, en general (*voir*, par exemple, le Mémoire de Painvin et la Note de M Carvallo), de donner les theoremes relatifs aux cônes ou aux plans se coupant Il m'a paru interessant de montrer que la methode employee s'applique a tous les cas, sans faire appel aux methodes de transformation

[2] Pour être complet, il est utile de remarquer que la démonstration ci-dessus tombe elle-même en defaut si tous les mineurs, sauf un, par exemple $\frac{\partial\Delta}{\partial A}$, se reduisent a zero Mais, dans ce cas, Θ' devient $-\alpha\frac{\partial\Delta}{\partial A}$, et $\alpha = 0$ exprime precisement que le cylindre a ses generatrices paralleles a une direction asymptotique de l'autre quadrique

simples, l'intersection des deux quadriques présentera le même aspect que l'intersection (sans point double) de deux cônes ou cylindres n'ayant entre eux aucune relation de position particulière.

b. THÉORÈME II. — *A toute racine double de l'équation en* λ *correspond un cône ayant son sommet sur toutes les quadriques du faisceau, ou un cylindre dont l'axe est une direction asymptotique commune à toutes les quadriques du faisceau.* (Nous supposons toujours, pour le moment, les cônes indécomposables.)

Ce théorème est démontré par ce qui précède.

Deux cas peuvent ici se présenter : 1° *Une seule racine est double.* L'intersection est une quartique à point double réel ou isolé : toutes les quadriques ont un même plan tangent en ce point. 2° *Il y a deux racines doubles.* Il leur correspond deux cônes ayant chacun son sommet sur toutes les surfaces du faisceau et en particulier sur l'autre cône. Les deux cônes et, par suite, toutes les quadriques ont une génératrice commune; le reste de l'intersection est une cubique gauche, coupant la génératrice commune en deux points distincts.

c. THÉOREME III. — A *toute racine triple de l'équation en* λ *correspond un cône ayant son sommet sur toutes les surfaces du faisceau et de plus le plan tangent à toutes ces surfaces en ce point est aussi tangent au cône.*

Il suffit, pour le voir, de mettre l'équation du cône sous la forme

$$A''z^2 - 2B''xy = 0,$$

ce qui est toujours possible. La quantité Φ de l'équation (5) devient alors

$$B''(B''\gamma'''^2 - 2A''\gamma\gamma').$$

et, comme B″ ne peut être nul (cône indécomposable), il faut, pour acquérir une racine triple, annuler le second facteur, ce qui exprime précisément la condition de l'énoncé.

Dans ce cas, toutes les quadriques du faisceau ont encore un même plan tangent en un point P; leur intersection est une courbe du quatrième ordre indécomposable et présentant au point P un rebroussement.

d. Il reste à examiner la singularité introduite par une racine quadruple.

D'après le cas précédent, on pourra écrire l'équation du cône S′

$$A''z^2 - 2B''xy = 0,$$

et prendre le plan des zy tangent à la surface S. L'équation de cette dernière devient alors

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z, t) = \alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 + 2\beta yz \\ + 2\beta' zx + 2\beta'' xy + 2\gamma x = 0,\end{aligned}$$

et l'équation (5),

$$\Delta\lambda^4 - \alpha'\gamma^2 A''\lambda^3 = 0.$$

Pour qu'il y ait une racine quadruple, il faut et il suffit que

$$\alpha'\gamma^2 A'' = 0$$

et, comme $A'' \neq 0$, que $\gamma = 0$ ou $\alpha' = 0$.

Si $\gamma = 0$, les deux surfaces sont des cônes de même sommet, comme toutes les surfaces du faisceau : l'équation (5) est indéterminée ; ce n'est pas le cas actuel.

Si $\alpha' = 0$, la surface S contient l'axe des y : *les surfaces du faisceau ont toutes une génératrice commune,* *et le reste de l'intersection est une cubique gauche tangente à la génératrice commune.* Le point de contact est le sommet du cône quadruple. Les quadriques ont en ce point un même plan tangent.

II.

$\Delta(\lambda)$ EST NUL, AINSI QUE TOUS SES MINEURS DU PREMIER ORDRE, MAIS UN MINEUR AU MOINS DU SECOND ORDRE EST DIFFÉRENT DE ZÉRO.

Le cône qui correspond à cette valeur de λ se réduit à un système de deux plans distincts. Nous supposerons, comme précédemment, que ce cône soit la surface S' et, par suite, que la racine λ, qui annule $\Delta(\lambda)$ et ses premiers mineurs, soit zéro. Δ' et Θ', qui est une fonction linéaire des premiers mineurs de Δ', sont nulles.

L'équation (5) devient alors

$$\Delta\lambda^4 - \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 = 0.$$

a. Ainsi *la racine nulle est double lorsque le cône correspondant est un système de deux plans distincts.*

Si l'on suppose les deux plans distincts se coupant, on peut les prendre pour plans des xy et des yz et Φ a pour valeur $\gamma'^2 - \alpha'\delta$; si les deux plans sont parallèles, on peut prendre pour leurs équations $z = 0$ et $z = h$, et la fonction Φ a pour valeur $h^2(\beta''^2 - \alpha\alpha')$. Par conséquent, l'intersection des deux plans qui constituent le cône dégénéré coupe la surface (S) et, par suite, toutes les surfaces du faisceau en deux points distincts.

Cela posé, nous avons trois cas à distinguer :

1° Les deux racines non nulles de l'équation en λ sont distinctes. Il leur correspond deux cônes n'ayant pas leurs sommets sur l'intersection : cette dernière se compose donc de deux courbes planes non évanouissantes et ne se touchant pas. Les quadriques sont bitangentes.

2° Les deux racines non nulles sont égales entre elles, mais n'annulent pas les premiers mineurs de $\Delta(\lambda)$.

Le cône double qui leur correspond est un cône effectif ayant son sommet sur l'intersection : celle-ci doit donc être composée de deux courbes planes dont une passera au sommet du cône, c'est-à-dire sera un système de deux droites. Les quadriques se touchent en trois points.

3° Les deux racines non nulles sont égales entre elles et annulent les premiers mineurs de $\Delta(\lambda)$.

Il leur correspond un système de deux plans distincts. L'intersection, devant être dans quatre plans différents, ne peut se composer que de droites. C'est un quadrilatère gauche. Les quadriques se touchent en quatre points qui sont les quatre sommets du quadrilatère.

b. Supposons maintenant la fonction Φ nulle. La racine nulle de l'équation en λ devient triple. *L'intersection des deux plans distincts est tangente à la surface.*

La racine qui reste correspond nécessairement à un cône véritable qui n'a pas son sommet sur l'intersection. Il est coupé par les deux plans suivant deux coniques, tangentes entre elles, qui constituent l'intersection des deux quadriques. Ces deux surfaces ont un plan tangent commun au point de contact des deux coniques.

c. La racine qui annule $\Delta(\lambda)$ et ses premiers mineurs est quadruple, $\Theta = 0$.

Je prendrai pour plan de coordonnées les deux plans qui composent la surface (S′), pour axe des y leur intersection, pour origine le point où les deux coniques se touchent (*voir* le paragraphe précédent), point où toutes les quadriques du faisceau ont un même plan tangent qui passe évidemment par Oy. Alors l'équation de (S') devient

$$2B'zx = o,$$

et, dans l'équation de la surface (S), $\delta = o$; $\Phi = o$ donne $\gamma' = o$; Θ devient égal à $B'\alpha'\gamma\gamma''$.

D'où trois cas à considérer :

1° $\alpha' = o$. — Le plan des y est sur les deux surfaces. Toutes les quadriques du faisceau se raccordent suivant Oy et ont de plus en commun deux génératrices de l'autre système. Le cône quadruple se compose de deux plans passant l'un par Oy et par une génératrice commune, l'autre par Oy et par l'autre génératrice commune.

2° $\gamma = o$. — Le plan des xy, qui compose une partie du cône (S'), est tangent à la surface (S). L'intersection se compose alors d'une véritable conique et de deux droites qui se coupent sur cette conique : le plan de ces deux droites est tangent à la conique.

3° $\gamma'' = o$. C'est le même cas que le précédent.

III.

TOUS LES MINEURS DU SECOND ORDRE DE $\Delta(\lambda)$ SONT NULS, MAIS UN ÉLÉMENT AU MOINS EST DIFFÉRENT DE ZÉRO.

L'équation (5) se réduit à

$$\Delta\lambda^4 - \Theta\lambda^3 = o.$$

Donc la racine nulle est triple, lorsque le cône correspondant se compose de deux plans confondus.

a. Θ n'est pas nul. A la racine non nulle correspond un cône véritable n'ayant pas son sommet sur la surface. Les quadriques sont inscrites dans un cône le long d'une même conique.

Si la conique est véritable, on ne peut pas avoir, dans le cas actuel, de racine quadruple : car, en prenant le plan de cette conique pour plan des xy, une tangente à la conique pour axe des y, un plan tangent à la surface (S) pour plan des zy, enfin l'axe des z conjugué de celui des y dans le plan tangent, l'équation (5) devient

$$\lambda\alpha'\alpha'' + \alpha'A'' = 0.$$

A n'est pas nul; α' ne peut l'être sans qu'il y ait une indétermination complète.

b. Supposons alors la conique, située dans le plan double, évanouissante. $\Theta = 0$ et l'équation se réduit à

$$\Delta\lambda^4 = 0.$$

Il y a toujours une racine quadruple : ce cas est donc séparé du précédent. Les deux quadriques se raccordent le long de deux droites concourantes.

IV.

TOUS LES ÉLÉMENTS DE $\Delta(\lambda)$ SONT NULS (POUR LA VALEUR DE λ CONSIDÉRÉE).

Les deux quadriques coïncident. La racine de l'équation en λ est quadruple.

V.

L'ÉQUATION EN λ EST UNE IDENTITÉ.

Toutes les quadriques du faisceau sont des cônes ou des systèmes de plans. Nous pouvons éliminer en bloc les cas de cônes ayant un sommet commun à distance finie ou infinie, ces cônes pouvant d'ailleurs dégénérer en plans : car toutes les variétés possibles se rencontreront en joignant par des droites tous les points d'une des variétés de coniques à un point situé hors du plan de la conique.

Supposons donc le cône (S′) non décomposable : son sommet sera sur l'autre cône qui, réciproquement, aura son sommet sur le premier (s'il ne se décompose pas). Cela résulte du théorème I. Enfin le second théorème nous apprend que le premier cône aura un plan tangent commun avec le second. Les deux cônes se touchent donc le long d'une génératrice : le reste de l'intersection est une conique. Si l'on observe que le faisceau de cônes comprend le cône composé du plan tangent commun et du plan de la conique commune, plan qui, exceptionnellement, peut se confondre avec le plan tangent, si l'on admet aussi que le second cône peut dégénérer en deux plans, on aura toutes les variétés que comporte ce cas.

La discussion de ce cas se ferait suivant les mêmes principes que précédemment. Ainsi, Δ et Δ' étant nuls, les deux surfaces S et S′ seraient des cônes véritables, des cylindres, des systèmes de plans ou des plans confondus. Dans chacun de ces cas les coefficients Θ, Θ', Φ seraient nuls soit parce que les mineurs d'un certain ordre de Δ ou de Δ' seraient nuls, soit par suite des positions mutuelles des deux cônes. Ce qui a été dit dans les paragraphes précédents suffit pour guider dans la discussion actuelle, et nous nous bornerons à renvoyer le lecteur pour le résumé des cas qui peuvent se présenter au Mémoire de Painvin (*Nouvelles Annales*, p. 213 et 214; 1869). Il conviendra cependant d'ajouter à l'énumération détaillée de Painvin le cas de deux quadriques composées l'une d'un plan P et d'un plan Q, l'autre du même plan P et d'un autre plan Q′ : Painvin ayant cru, avec raison d'ailleurs, devoir signaler à part les cônes de même sommet, les cylindres parallèles, etc., il m'a semblé utile de signaler un cas intéressant où toutes les quadriques du faisceau sont des systèmes de plans. Il y en a encore d'autres que les lecteurs des *Nouvelles Annales* découvriront, comme je l'ai indiqué plus haut, en annulant, non seulement Δ ou Δ', mais encore leurs mineurs.

a. Δ et Δ' sont nuls sans que leurs premiers mineurs soient nuls. Ce sont de véritables cônes (ou cylindres), et l'on peut appliquer les théorèmes de l'article premier : ils ont chacun leur sommet sur la surface de l'autre, et un plan tangent au premier cône en son sommet est aussi tangent à l'autre ($\Phi = 0$). Les deux cônes sont donc tangents tout le long d'une génératrice; le reste de l'intersection est une courbe plane. Il peut aussi arriver ici que les deux cônes aient même sommet.

b. Δ' est nul sans que ses premiers mineurs le soient; Δ est nul ainsi que ses mineurs du premier ordre. La surface (S') est un véritable cône; (S) est un système de deux plans distincts. Les théorèmes de l'article I s'appliquent toujours : le cône (S') a son sommet sur la surface (S) et un des deux plans qui composent la surface (S) touche le cône (S'). C'est au point de vue du faisceau de cônes le même cas que le précédent.

c. Δ' est nul sans que ses premiers mineurs le soient; Δ est nul ainsi que ses mineurs du premier et du second ordre. (S) est un plan double qui passe par le sommet du premier cône. C'est encore un cas particulier (cônes tangents entre eux le long de deux génératrices).

Il n'y a plus à associer que des couples de plans.