NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DE SAINT-GERMAIN

Note sur le problème de mécanique proposé au concours d'agrégation en 1891

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 516-526

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__516_1>

NOTE SUR LE PROBLÈME DE MÉCANIQUE PROPOSÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1891;

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. DE SAINT-GERMAIN À M. ROUCHÉ.

Je vais encore brièvement indiquer cette année, pour quelques lecteurs des *Nouvelles Annales*, une solution du problème de Mécanique qui a été proposé aux candidats à l'Agrégation des Sciences mathématiques.

On supposait qu'un trièdre trirectangle OXYZ, tournant avec une vitesse constante ω autour de l'arête OZ, dirigée en sens contraire de la pesanteur, entraîne avec lui le paraboloïde P, défini par l'équation

$$x^2 - y^2 = 2pz. \tag{1}$$

Un point M, de masse 1, de poids g, assujetti à se mouvoir sur la surface de P, est attiré vers le sommet O par une force égale à $\frac{2g}{p}$ OM; en outre, MA, MB étant les perpendiculaires abaissées de M sur les génératrices de P qui passent en O, M est sollicité par deux forces, respectivement dirigées suivant les *segments* AM, BM et égales à $\frac{3g}{p}$ AM, $\frac{3g}{p}$ BM. La position du point M est définie par les paramètres λ, μ qui figurent dans les équations

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{x^2}{\lambda - p} + \frac{y^2}{\lambda + p} &= \lambda - 2z, \\ \frac{x^2}{\mu + p} + \frac{y^2}{\mu - p} &= \mu + 2z \end{aligned} \right.$$

des paraboloïdes homofocaux à P et passant en M. Cela posé, on demandait :

1° De former l'équation de Jacobi dont il suffirait de connaître une intégrale complète pour en déduire, par des différentiations, les équations du mouvement du point M;

2° De trouver cette intégrale complète et les équations du mouvement quand on suppose $\omega = 0$;

3° D'intégrer l'équation de la trajectoire et d'indiquer la forme de cette ligne quand, ω étant toujours nul, on a, pour $t = 0$,

$$x = y = p\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3 + 3\sqrt{3}}{8}\sqrt{pg},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{9 - \sqrt{3}}{8}\sqrt{pg}.$$

La première partie est une question de cours. Cherchons la demi-force vive T du point M. Soient x, y, z les coordonnées du mobile : sa vitesse, résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement, a pour projections, sur OX, OY, OZ,

$$x' - \omega y, \quad y' + \omega x, \quad z',$$

et l'on a

$$(3)\quad T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \omega(xy' - yx') + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2).$$

Cherchons encore le travail δU correspondant à un déplacement virtuel du point M compatible avec les liaisons *telles qu'elles existent à l'instant même que nous considérons,* c'est-à-dire à un déplacement arbitraire sur le paraboloïde supposé fixe. Le travail du poids est $-g\,\delta z$, celui de l'attraction dirigée suivant MO, $-\frac{2g}{p}(x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z)$; si le point A est sur la génératrice pour laquelle y est égal à x, on trouve aisément que ses coordonnées sont

$$\frac{x+y}{2},\quad \frac{x+y}{2},\quad 0;$$

le travail de la force dirigée suivant AM est donc

$$\frac{3g}{p}\left[\frac{x-y}{2}(\delta x - \delta y) + z\,\delta z\right] = \frac{3g}{2p}\,\delta.\overline{AM}^2;$$

le travail de la force dirigée suivant BM est de même

$$\frac{3g}{p}\left[\frac{x+y}{2}(\delta x + \delta y) + z\,\delta z\right] = \frac{3g}{2p}\,\delta.\overline{BM}^2,$$

et l'on trouve, en ajoutant les travaux de toutes les forces,

$$\delta U = -g\,\delta z + \frac{g}{p}(x\,\delta x + y\,\delta y + 4z\,\delta z).$$

On voit, sans même invoquer la relation qui lie x, y, z, qu'il existe une fonction de forces correspondante [1]:

---

[1] Si l'on cherchait le mouvement relatif de M en introduisant les forces fictives de Coriolis, la valeur de T se simplifierait, mais

nous pouvons l'écrire

$$U = -gz + \frac{g}{2p}(x^2 + y^2 + 4z^2). \tag{4}$$

Il faut exprimer U et T en fonction des variables λ, μ. Des équations (1) et (2) on déduit, soit par la méthode de Binet, soit par une résolution directe qui est ici bien simple,

$$\left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{(\lambda - p)(\mu + p)}{2}, \\ y^2 &= \frac{(\lambda + p)(\mu - p)}{2}, \\ z^2 &= \frac{\lambda - \mu}{2}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

On trouve alors

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{(\mu + p)\lambda' + (\lambda - p)\mu'}{2\sqrt{2(\lambda - p)(\mu + p)}}, \\ y' &= \frac{(\mu - p)\lambda' + (\lambda + p)\mu'}{2\sqrt{2(\lambda + p)(\mu - p)}}, \\ z' &= \frac{\lambda' - \mu'}{2}; \end{aligned}\right. \tag{6}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{\lambda(\lambda + \mu)}{4(\lambda^2 - p^2)}\lambda'^2 + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{4(\mu^2 - p^2)}\mu'^2. \tag{7}$$

Ces résultats nous conduisent aisément aux valeurs

---

on devrait considérer le travail virtuel de la force centrifuge composée F_2, soit $2\omega(y'\delta x - x'\delta y)$; la fonction des forces n'existerait plus et on ne saurait former l'équation de Jacobi. Quant à croire que le travail virtuel de F_2 est nul parce que son travail réel le serait, c'est une grave erreur.

cherchées de U et de T,

$$(8) \qquad U = -g\frac{\lambda-\mu}{2} + \frac{g}{2p}(\lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2 - p^2),$$

$$(9) \quad \begin{cases} T = \dfrac{\lambda(\lambda+\mu)}{8(\lambda^2-p^2)}\lambda'^2 + \dfrac{\mu(\lambda+\mu)}{8(\mu^2-p^2)}\mu'^2 \\ \quad + \dfrac{p\omega}{2}\sqrt{(\lambda^2-p^2)(\mu^2-p^2)}\left(\dfrac{\mu'}{\mu^2-p^2} - \dfrac{\lambda'}{\lambda^2-p^2}\right) \\ \quad + \dfrac{1}{2}\omega^2(\lambda\mu - p^2), \end{cases}$$

le radical ayant le signe du produit xy.

Comme la valeur de T n'est pas homogène par rapport à λ' et μ', nous devrons, pour former la fonction H d'Hamilton et l'équation de Jacobi, exprimer au moyen des variables canoniques la quantité

$$K = \lambda'\frac{\partial T}{\partial \lambda'} + \mu'\frac{\partial T}{\partial \mu'} - T.$$

Il convient d'abord de la simplifier en décomposant T en trois parties, T_0, T_1, T_2; T_0 est la somme des termes indépendants de λ' et μ', T_1 et T_2 sont les sommes des termes du premier et du second degré par rapport aux mêmes variables; le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes donne la relation

$$\lambda'\left(\frac{\partial T_0}{\partial \lambda'} + \frac{\partial T_1}{\partial \lambda'} + \frac{\partial T_2}{\partial \lambda'}\right) + \mu'\left(\frac{\partial T_0}{\partial \mu'} + \frac{\partial T_1}{\partial \mu'} + \frac{\partial T_2}{\partial \mu'}\right) = T_1 + 2T_2,$$

$$K = T_2 - T_0,$$

ou, en se reportant à l'équation (9),

$$(10) \quad K = \frac{\lambda(\lambda+\mu)}{8(\lambda^2-p^2)}\lambda'^2 + \frac{\mu(\lambda+\mu)}{8(\mu^2-p^2)}\mu'^2 - \frac{1}{2}\omega^2(\lambda\mu - p^2).$$

Pour introduire les variables canoniques, nous considérerons l'expression (9) de T et nous poserons

$$(11)\quad \begin{cases} l = \dfrac{\partial T}{\partial \lambda'} = \dfrac{\lambda(\lambda+\mu)}{4(\lambda^2-p^2)}\lambda' - \dfrac{p\omega}{2}\sqrt{\dfrac{\mu^2-p^2}{\lambda^2-p^2}}, \\ m = \dfrac{\partial T}{\partial \mu'} = \dfrac{\mu(\lambda+\mu)}{4(\mu^2-p^2)}\mu' + \dfrac{p\omega}{2}\sqrt{\dfrac{\lambda^2-p^2}{\mu^2-p^2}}. \end{cases}$$

Dans l'équation (10) remplaçons λ' et μ' par leurs valeurs tirées des équations (11) en fonction de l et de m et reportons-nous à l'équation (8) : nous aurons immédiatement la quantité

$$H = K - U,$$

exprimée au moyen des variables λ, μ, l, m,

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{2(\lambda^2-p^2)}{\lambda(\lambda+\mu)}\left(l + \frac{p\omega}{2}\sqrt{\frac{\mu^2-p^2}{\lambda^2-p^2}}\right)^2 \\ & + \frac{2(\mu^2-p^2)}{\mu(\lambda+\mu)}\left(m - \frac{p\omega}{2}\sqrt{\frac{\lambda^2-p^2}{\mu^2-p^2}}\right)^2 \\ & - \frac{1}{2}\omega^2(\lambda\mu - p^2) + \frac{1}{2}g(\lambda-\mu) - \frac{g}{2p}(\lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2 - p^2). \end{aligned}$$

Si, dans cette expression, on remplace l, m par $\dfrac{\partial S}{\partial \lambda}$, $\dfrac{\partial S}{\partial \mu}$ et si, ajoutant au résultat obtenu le terme $\dfrac{\partial S}{\partial t}$, on égale la somme à zéro, on obtient une équation aux dérivées partielles propre à déterminer la variable S considérée comme une fonction inconnue de λ, μ, t. Jacobi a démontré qu'il suffirait d'en connaître une intégrale S_1 dépendant de deux constantes arbitraires α_1, α_2, autres que celle qu'on peut introduire par simple addition, pour en déduire les équations du mouvement sous la forme

$$(12)\quad \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \qquad \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \qquad \frac{\partial S_1}{\partial \lambda} = l, \qquad \frac{\partial S_1}{\partial \mu} = m;$$

$S = S_1 + \alpha_3$ est d'ailleurs une intégrale complète de l'équation de Jacobi.

Quand on fait $\omega = 0$, cette équation devient, en multipliant tous les termes par $\frac{\lambda + \mu}{2}$,

$$\frac{\lambda^2 - p^2}{\lambda}\left(\frac{\partial S}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{\mu^2 - p^2}{\mu}\left(\frac{\partial S}{\partial \mu}\right)^2$$
$$+ g\,\frac{\lambda^2 - \mu^2}{4} - g\,\frac{\lambda^3 + \mu^3}{4p} + \frac{\lambda + \mu}{2}\left(\frac{pg}{2} + \frac{\partial S}{\partial t}\right) = 0;$$

elle présente une forme qu'on a bien souvent rencontrée dans les applications classiques du théorème de Jacobi, et aucun lecteur ne sera embarrassé pour trouver l'intégrale demandée : si nous posons, pour simplifier l'écriture,

$$\varphi(u) = gu^3 - pgu^2 + p(2h - pg)u + a,$$
$$\psi(u) = gu^3 + pgu^2 + p(2h - pg)u - a,$$

nous aurons

$$S_1 = \frac{1}{2}\int \frac{d\lambda \sqrt{\lambda\,\varphi(\lambda)}}{\sqrt{p(\lambda^2 - p^2)}} + \frac{1}{2}\int \frac{d\mu \sqrt{\mu\,\psi(\mu)}}{\sqrt{p(\mu^2 - p^2)}} - ht;$$

a et h sont deux constantes qui remplacent α_1 et α_2. L'intégrale des forces vives est vérifiée quand ω est nul et $T - U$ reste égal à h, en adoptant pour U les valeurs (4) et (8). Les formules (12) donnent les équations du mouvement; mais, aux deux premières, on peut substituer les équations suivantes, où λ_0, μ_0 désignent les valeurs de λ, μ pour $t = 0$, 1,

$$(13) \qquad \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - p^2)\,\varphi(\lambda)}} = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\sqrt{\mu}\, d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - p^2)\,\psi(\mu)}},$$

$$(14) \qquad \frac{2t}{\sqrt{p}} = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}\, d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - p^2)\,\varphi(\lambda)}} + \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\mu^{\frac{3}{2}}\, d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - p^2)\,\psi(\mu)}};$$

la première est l'équation de la trajectoire, la seconde donne la loi du mouvement sur cette ligne. Enfin si, dans les deux dernières équations (12), on remplace l, m par leurs valeurs (11), sauf $\omega = 0$, on en pourra déduire

$$(15)\quad \lambda' = \frac{2\sqrt{(\lambda^2 - p^2)\varphi(\lambda)}}{(\lambda+\mu)\sqrt{p\lambda}}, \qquad \mu' = \frac{2\sqrt{(\mu^2 - p^2)\psi(\mu)}}{(\lambda+\mu)\sqrt{p\mu}};$$

les radicaux en λ et μ doivent avoir, à un instant quelconque, des valeurs de mêmes signes que λ' et μ', et ce sont les mêmes déterminations qui doivent figurer dans les équations (13) et (14).

Étudions maintenant la trajectoire dans le cas particulier proposé. A cet effet, nous déterminerons les constantes qui figurent dans son équation, et d'abord λ_0, μ_0. Pour que les intersections des paraboloïdes (1) et (2) soient réelles, il faut et il suffit que λ et μ soient de même signe et, en valeur absolue, au moins égaux à p : nous les prendrons positifs. En ayant égard aux valeurs de x_0, y_0, on voit que z_0 est nul : le point de départ M_0 du mobile est sur la génératrice OA ; les équations (3) donnent d'ailleurs

$$\lambda_0 = \mu_0 = 2p.$$

Nous déterminerons λ'_0, μ'_0 à l'aide des deux premières équations (4) : si l'on y remplace x', y', λ, μ par leurs valeurs initiales, on a

$$-\frac{3+3\sqrt{3}}{8}\sqrt{pg} = \frac{3\lambda'_0 + \mu'_0}{2\sqrt{6}},$$

$$-\frac{9+\sqrt{3}}{8}\sqrt{pg} = \frac{\lambda'_0 + 3\mu'_0}{2\sqrt{6}};$$

d'où l'on tire

$$\lambda'_0 = -\frac{3}{4}\sqrt{2pg}, \qquad \mu'_0 = -\frac{3}{4}\sqrt{6pg}.$$

Les intégrales premières (15) vont nous permettre de calculer facilement h et a : remplaçons $\varphi(\lambda)$ et $\psi(\mu)$ par leurs développements, donnons aux variables leurs valeurs initiales et élevons au carré : nous aurons

$$\frac{9}{8}pg = \frac{3(2gp^3 + 4p^2h + a)}{8p^2},$$
$$\frac{27}{8}pg = \frac{3(10gp^3 + 4p^2h - a)}{8p^2};$$

on en déduit

$$h = 0, \qquad a = gp^3.$$

On peut s'assurer directement que h est nul, car U_0 est égal à $\frac{3}{2}pg$, et l'équation (9) montre que telle est aussi la valeur initiale de T : écrivons alors l'équation différentielle de la trajectoire

$$(13\,bis) \qquad \frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - p^2)\varphi(\lambda)}} = \frac{\sqrt{\mu}\,d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - p^2)\psi(\mu)}};$$

$d\lambda$, $d\mu$ sont proportionnels à λ', μ' et, en se plaçant à l'instant initial, cette équation permettrait de calculer a. Les valeurs de a et de h donnent les identités

$$\varphi(u) = g(u^2 - p^2)(u - p), \qquad \psi(u) = (u^2 - p^2)(u + p),$$

et l'équation différentielle de la trajectoire peut s'écrire

$$(16) \qquad \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda - p}}\,\frac{d\lambda}{\lambda^2 - p^2} = \pm\sqrt{\frac{\mu}{\mu + p}}\,\frac{d\mu}{\mu^2 - p^2}.$$

Sans l'intégrer, on peut en tirer des indications précises sur la forme de la trajectoire : λ, μ partent tous deux de la valeur $2p$ et commencent par décroître, λ'_0, μ'_0 étant négatifs ; il faut d'abord prendre le signe $+$ dans le second membre de l'équation (16). Il est clair que μ commence par décroître plus rapidement que λ, parce que le coefficient de $d\mu$ est d'abord moindre que celui de $d\lambda$; tant que μ décroîtra, il ne pourra être supérieur à λ. Quand μ atteint sa limite inférieure p, l'intégrale du second membre de l'équation (16) croît indéfiniment; il doit en être de même pour l'intégrale du premier membre et il faut pour cela que λ tende en même temps vers sa limite p; l'équation (14) montre que λ et μ n'atteignent leurs limites qu'au bout d'un temps infini. Ainsi μ et λ décroissent en même temps de $2p$ à p, λ restant au moins égal à μ, par conséquent, z au moins égal à zéro; la trajectoire se réduit à un arc fini M_0O situé au-dessus du plan OXY sur la région de la surface de P qui est comprise entre la génératrice OA et le plan ZOX.

Cherchons la tangente en un point quelconque M. L'expression (7) de ds^2 montre qu'entre quatre lignes de courbure correspondant aux paramètres λ et $\lambda + d\lambda$, μ et $\mu + d\mu$, $d\lambda$ et $d\mu$ étant infiniment petits, il existe un petit rectangle dont les côtés sont

$$\sqrt{\frac{\lambda(\lambda+\mu)}{\lambda^2-p^2}}\,\frac{d\lambda}{2},\qquad \sqrt{\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\mu^2-p^2}}\,\frac{d\mu}{2};$$

il en résulte, eu égard à l'équation (16), que, si l'on appelle θ l'angle sous lequel la trajectoire coupe en M la ligne $\lambda = \text{const.}$, on a

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{\lambda(\mu^2-p^2)}{\mu(\lambda^2-p^2)}}\,\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{\lambda-p}{\mu-p}\sqrt{\frac{\lambda+p}{\mu+p}}.$$

Au point M_0, la trajectoire coupe, sous un angle de $30°$, la ligne de courbure $\lambda = 2p$ et, par suite, comme on le voit aisément, sous un angle de $15°$, la génératrice M_0O.

Pour étudier la courbe dans le voisinage de l'origine, remplaçons λ, μ par $p+\alpha$, $p+\beta$; si α, β sont extrêmement petits, l'équation (16) se réduit sensiblement à

$$\alpha^{-\frac{3}{2}}\,d\alpha = \frac{d\beta}{\beta\sqrt{2}};$$

d'où l'on tire

$$\log\frac{\beta}{C} = -\sqrt{\frac{8}{\alpha}}, \qquad \beta = Ce^{-\sqrt{\frac{8}{\alpha}}};$$

β est plus petit qu'aucune puissance positive de α; donc, au point O, la trajectoire a un contact d'ordre infini avec la parabole $\mu = p$ située dans le plan ZOX et sa forme générale nous est maintenant bien connue.

Hâtons-nous de terminer en indiquant l'intégrale de l'équation (16). Le moyen le plus commode d'intégrer le premier membre est de poser

$$\frac{\lambda - p}{\lambda} = u^2;$$

d'où

$$\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{(\lambda^2 - p^2)\sqrt{\lambda - p}} = \frac{2\,du}{pu^2(2 - u^2)}.$$

On obtient immédiatement l'intégrale en fonction de u et, par suite, de λ; l'intégrale du second membre s'en déduit en changeant λ en μ, p en $-p$: si l'on égale les deux intégrales prises à partir de $\lambda = 2p$ et de $\mu = 2p$, on trouve, pour l'équation qui définit la trajectoire,

$$\log\frac{(2-\sqrt{3})\sqrt{\mu - p}\,(\sqrt{2\lambda} + \sqrt{\lambda - p})}{\sqrt{3}\sqrt{\lambda + p}\,(\sqrt{2\mu} - \sqrt{\mu + p})}$$
$$= \sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda - p}} + \sqrt{\frac{2\mu}{\mu + p}} - 2\,\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$