H. Laurent

Sur les formes quadratiques et sur l'équation dite en *s*

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 503-507

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__503_0>

SUR LES FORMES QUADRATIQUES ET SUR L'ÉQUATION DITE EN s;

PAR M. H. LAURENT.

Les méthodes connues pour la discussion de la fameuse équation en s, que l'on rencontre dans une foule de théories et, en particulier, dans celle des plans principaux des quadriques, ont l'inconvénient d'être trop particulières ou de s'appuyer sur des identités déduites de la théorie de la multiplication des déterminants, qui n'est pas exigée par les programmes officiels. Voici une nouvelle démonstration très générale et qui ne présente pas ces inconvénients; elle est d'ailleurs fort simple, comme on va le voir.

Soit $a_{ij} = a_{ji}$. Il s'agit de trouver la condition nécessaire et suffisante pour que la résultante en s,

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-s & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-s \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad S = 0,$$

des équations

$$(2)\qquad \left\{ \begin{array}{l} (a_{11}-s)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-s)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-s)x_n = 0. \end{array} \right.$$

ait une racine double, triple, etc.

Rien n'empêche de supposer que la première des équations (2) est précisément l'équation $S = 0$ elle-même; il suffit de supposer que $x_1, x_2, \dots, x_n$ y sont remplacés par leurs valeurs, tirées des autres équations (2), auxquelles on peut adjoindre

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0 \tag{2}$$

(bien que cela ne soit pas nécessaire, la démonstration se faisant aussi bien en supposant $x_n = 1$). En égalant alors à zéro la dérivée du premier membre de la première formule (2) prise par rapport à s, on aura la condition pour que $S = 0$ ait une racine double; en prenant cette dérivée, on introduira les quantités $\frac{dx_i}{ds}$ qui devront être éliminées en faisant usage des autres formules (2) également différentiées; ainsi l'équation $\frac{dS}{ds} = 0$ sera la résultante des équations

$$(3)\quad \begin{cases} (a_1 - s)\dfrac{dx_1}{ds} + a_{12}\dfrac{dx_2}{ds} + \ldots + a_{1n}\dfrac{dx_n}{ds} - x_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\dfrac{dx_1}{ds} + a_{n2}\dfrac{dx_2}{ds} + \ldots + (a_{nn} - s_n)\dfrac{dx_n}{ds} - x_n = 0, \\ \qquad\qquad x_1\dfrac{dx_1}{ds} + x_2\dfrac{dx_2}{ds} + \ldots + x_n\dfrac{dx_n}{ds} = 0, \end{cases}$$

provenant de l'élimination des dérivées $\frac{dx_i}{ds}$, et aussi des quantités x_i à l'aide du système (2). Or, si l'on multiplie la première des équations (3) par $\frac{\partial S}{\partial a_{11}}$, la seconde par $\frac{\partial S}{\partial a_{21}}$, ..., la $n^{\text{ième}}$ par $\frac{\partial S}{\partial a_{n1}}$ et si on les ajoute, on trouve, en observant que $S = 0$,

$$x_1\frac{\partial S}{\partial a_{11}} + x_2\frac{\partial S}{\partial a_{21}} + \ldots + x_n\frac{\partial S}{\partial a_{n1}} = 0;$$

mais $x_1, x_2, \ldots$, en vertu de (2), sont proportionnels à $\frac{\partial S}{\partial a_{11}}, \frac{\partial S}{\partial a_{12}} = \frac{\partial S}{\partial a_{21}} = \ldots$, donc

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a_{11}}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial a_{21}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial S}{\partial a_{n1}}\right)^2 = 0.$$

Telle est la forme que l'on peut donner à l'équation $\frac{\partial S}{\partial s} = 0$; en la combinant avec $S = 0$, cela exige que tous les mineurs de S soient nuls, si les a_{ij} sont réels.

Cherchons la condition pour que $S = 0$ ait une racine triple; des considérations analogues nous conduisent à différentier les formules (3) et l'on a

$$(a_{11} - s)\frac{d^2 x}{ds^2} + \ldots + a_{1n}\frac{d^2 x_n}{ds^2} - 2\frac{dx_1}{ds} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En multipliant la seconde par $\frac{\partial_2 S}{\partial a_{11}\partial a_{12}}$, la suivante par $\frac{\partial^2 S}{\partial a_{11}\partial a_{23}}, \ldots$ et en les ajoutant, on a

$$\frac{dx_2}{ds}\frac{\partial^2 S}{\partial a_{11}\partial a_{22}} + \frac{dx_3}{ds}\frac{\partial^2 S}{\partial a_{11}\partial a_{23}} + \ldots = 0;$$

mais $\frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}, \ldots$ étant proportionnels à leurs coefficients, on a encore

$$\frac{\partial_2 S}{\partial a_{11}\partial a_{22}} = 0, \qquad \frac{\partial_2 S}{\partial a_{11}\partial a_{23}} = 0, \qquad \ldots,$$

et ainsi de suite.

L'esprit de cette méthode s'applique encore dans une foule d'autres circonstances : par exemple, dans la théorie des intersections des coniques et des quadriques. Pour ne pas trop allonger cet article, nous considérerons seulement les applications aux quadriques.

Soient $f = 0$, $g = 0$ les équations de deux quadriques, f et g désignant des fonctions de x, y, z, t homogènes. Nous ferons

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \ldots,$$
$$f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \ldots.$$

Cherchons un point x, y, z, t ayant même plan polaire par rapport aux deux quadriques, il sera déterminé par les équations

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_3}{g_3} = \frac{f_4}{g_4},$$

ou, en égalant ces rapports à $-s$,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} f_1 + g_1 s &= 0, & f_2 + g_2 s &= 0,\\ f_3 + g_3 s &= 0, & f_4 + g_4 s &= 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on élimine x, y, z, t entre ces formules, on obtient une équation du quatrième degré en s

$$S = 0,$$

qui, en général, aura quatre racines distinctes, à chacune desquelles correspondra un point x, y, z, t donné par les formules (4); tout cela est bien connu.

1° *Je dis que si l'équation* $S = 0$ *a une racine double, les surfaces* $f = 0$, $g = 0$ *sont tangentes.* En effet, l'équation $S = 0$ peut être considérée comme étant la première des équations (1), où x, y, z sont remplacés par leurs valeurs tirées des autres formules (1). En différentiant ces équations, on aura

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} (f_{11} + g_{11}s)\dfrac{dx}{ds} + (f_{12} + g_{12}s)\dfrac{dy}{ds} + (f_{13} + g_{13}s)\dfrac{dz}{ds} + g_1 = 0,\\ (f_{21} + g_{21}s)\dfrac{dx}{ds} + (f_{22} + g_{22}s)\dfrac{dy}{ds} + (f_{23} + g_{23}s)\dfrac{dz}{ds} + g_2 = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (f_{41} + g_{41}s)\dfrac{dx}{ds} + (f_{42} + g_{42}s)\dfrac{dy}{ds} + (f_{43} + g_{43}s)\dfrac{dz}{ds} + g_4 = 0. \end{array}\right.$$

On en tire

$$\begin{vmatrix} f_{11} + g_{11}s & f_{12} + g_{12}s & f_{13} + g_{13}s & g_1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_{41} + g_{41}s & f_{42} + g_{42}s & f_{43} + g_{43}s & g_4 \end{vmatrix} = 0;$$

ajoutant les lignes avec la dernière après les avoir multipliées par x, y, z, t, on a, en vertu de (1) et du théorème des fonctions homogènes,

$$\begin{vmatrix} f_{11}+g_{11}s & f_{12}+g_{12}s & f_{13}+g_{13}s & g_1 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & g \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on conclut $g = 0$ et, par suite, en vertu de (1), $f = 0$. Les surfaces $g = 0$, $f = 0$ en leur point commun x, y, z sont donc tangentes.

2° Cette démonstration est en défaut quand les mineurs de S sont nuls, car le multiplicateur de g, dans la formule précédente, est nul. Mais alors les formules (1) se réduisent à deux distinctes; il y a une infinité de pôles x, y, z en ligne droite répondant à la racine double; la droite de ces points rencontre $f = 0$ en deux points où l'on a aussi $g = 0$: les surfaces $f = 0$, $g = 0$ sont alors bitangentes; elles se coupent d'ailleurs suivant deux courbes planes, puisque $f + \lambda g = 0$ représente alors deux plans.

3° Si tous les mineurs de second ordre de S étaient nuls, un raisonnement analogue prouverait que $S = 0$ a une racine triple et que les pôles correspondants x, y, z seraient dans un plan; les deux surfaces $f = 0$, $g = 0$ circonscrites l'une à l'autre se toucheraient suivant une courbe plane.