NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CAHEN

Note sur la série $\sum_{1}^{\infty} n^s u^n$

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 476-477

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__476_1>

NOTE SUR LA SÉRIE $\sum_{1}^{\infty} n^s u^n$;

PAR M. E. CAHEN,
Professeur au lycée de Rennes.

Pour $s = 0$,

$$\sum_{1}^{\infty} n^s u^n = \frac{u}{1-u} \qquad (\text{mod } u < 1).$$

Pour $s = 1$,

$$\sum_{1}^{\infty} n u^n = \frac{u}{(1-u)^2} \qquad (\text{mod } u < 1).$$

En général, s étant entier, $\sum_{1}^{\infty} n^s u^n = \frac{A}{(1-u)^{s+1}}$, A restant fini pour $u = 1$.

Je me propose d'étendre cette proposition au cas de s quelconque > 0.

On a, pour toute valeur de s, n étant un entier > 1,

$$n^s = \frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}{1.2\ldots n}\,\frac{\Gamma(s+1)}{1+\varepsilon_n}, \qquad 0 < \varepsilon_n < 1 \text{ (}^1\text{)}.$$

La série proposée peut donc s'écrire

$$u + \sum_2^\infty \frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}{1.2\ldots n}\,\frac{\Gamma(s+1)}{1+\varepsilon_n}\,u^n.$$

Appelons α et β deux limites, l'une inférieure, l'autre supérieure au nombre $\frac{1}{1+\varepsilon_n}$,

$$\frac{1}{2} \leqq \alpha < \beta < 1.$$

On voit que la somme de la série est comprise entre

$$u + \alpha \sum_2^\infty \frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}{1.2\ldots n}\,\Gamma(s+1)\,u^n$$

et

$$u + \beta \sum_2^\infty \frac{(s+1)\ldots(s+n)}{1.2\ldots n}\,\Gamma(s+1)\,u^n,$$

c'est-à-dire entre

$$u + \alpha\,\Gamma(s+1)\left[\frac{1}{(1-u)^{s+1}} - 1 - (s+1)u\right]$$

et

$$u + \beta\,\Gamma(s+1)\left[\frac{1}{(1-u)^{s+1}} - 1 - (s+1)u\right];$$

ce qui démontre le théorème.

---

(1) *Voir* SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 180.