

E. CAHEN

Note sur la série $\sum_1^{\infty} n^s u^n$

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10
(1891), p. 476-477

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__476_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA SÉRIE $\sum_1^{\infty} n^s u^n$;

PAR M. E. CAHEN,
Professeur au lycée de Rennes.

Pour $s = 0$,

$$\sum_1^{\infty} n^s u^n = \frac{u}{1-u} \quad (\text{mod } u < 1).$$

Pour $s = 1$,

$$\sum_1^{\infty} n u^n = \frac{u}{(1-u)^2} \quad (\text{mod } u < 1).$$

En général, s étant entier, $\sum_1^{\infty} n^s u^n = \frac{A}{(1-u)^{s+1}}$, A restant fini pour $u = 1$.

Je me propose d'étendre cette proposition au cas de s quelconque > 0 .

(477)

On a, pour toute valeur de s , n étant un entier > 1 ,

$$n^s = \frac{(s+1)(s+2)\dots(s+n)}{1.2\dots n} \frac{\Gamma(s+1)}{1+\varepsilon_n}, \quad 0 < \varepsilon_n < 1 \quad (1).$$

La série proposée peut donc s'écrire

$$u + \sum_2^{\infty} \frac{(s+1)(s+2)\dots(s+n)}{1.2\dots n} \frac{\Gamma(s+1)}{1+\varepsilon_n} u^n.$$

Appelons α et β deux limites, l'une inférieure, l'autre supérieure au nombre $\frac{1}{1+\varepsilon_n}$,

$$\frac{1}{2} \leq \alpha < \beta < 1.$$

On voit que la somme de la série est comprise entre

$$u + \alpha \sum_2^{\infty} \frac{(s+1)(s+2)\dots(s+n)}{1.2\dots n} \Gamma(s+1) u^n$$

et

$$u + \beta \sum_2^{\infty} \frac{(s+1)\dots(s+n)}{1.2\dots n} \Gamma(s+1) u^n,$$

c'est-à-dire entre

$$u + \alpha \Gamma(s+1) \left[\frac{1}{(1-u)^{s+1}} - 1 - (s+1)u \right]$$

et

$$u + \beta \Gamma(s+1) \left[\frac{1}{(1-u)^{s+1}} - 1 - (s+1)u \right];$$

ce qui démontre le théorème.

(¹) Voir SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 180.