NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CAHEN

Note sur la convergence de quelques séries

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 453-459

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__453_1>

NOTE SUR LA CONVERGENCE DE QUELQUES SÉRIES;

PAR M. E. CAHEN,
Professeur au lycée de Rennes.

Soit une série $\sum_{1}^{\infty} \varphi(n)$.

Soit $\psi(n)$ la fonction primitive de $\varphi(n)$, de façon que $\varphi(n) = \psi'(n)$.

Le théorème des accroissements finis donne

$$\varphi(n + \theta_n) = \psi(n+1) - \psi(n), \qquad 0 < \theta_n < 1;$$

d'où

$$\sum_{1}^{n} \varphi(n + \theta_n) = \psi(n+1) - \psi(1).$$

Il suffit de voir si la fonction ψ converge ou non vers une limite lorsque n augmente indéfiniment, pour décider de la convergence ou de la divergence de la série $\sum_1^\infty \varphi(n+\theta_n)$.

Pour passer de là à la série $\sum \varphi(n)$, supposons que la série $\sum [\varphi(n+\theta_n)-\varphi(n)]$ soit convergente. Dans ces conditions, la série $\sum \varphi(n)$ est convergente ou divergente en même temps que la série $\sum \varphi(n+\theta_n)$, et le problème est résolu.

Cette méthode s'applique, quelle que soit la fonction $\varphi(n)$.

Dans le cas particulier où cette fonction est toujours de même signe, par exemple positive, et indéfiniment décroissante en valeur absolue, on retrouve un théorème dû à Cauchy.

Dans ce cas, en effet, la série $\sum [\varphi(n+\theta_n)-\varphi(n)]$ est convergente, puisque $\varphi(n+\theta_n)-\varphi(n)$ est < 0 et $<$ en valeur absolue que $\varphi(n+1)-\varphi(n)$. La somme des n premiers termes de cette série est donc $<$ en valeur absolue que $\varphi(1)-\varphi(n+1)$ qui tend vers $\varphi(1)$. Donc la série $\sum \varphi(n)$ est convergente ou divergente suivant que $\varphi(n)$ tend ou non vers une limite pour $n=\infty$. Dans tous les cas, la méthode permet d'avoir deux limites de la somme $\sum_1^n \varphi(n)$, comme on le verra par les exemples suivants.

EXEMPLES.

Premier exemple. — Série harmonique : $\sum \frac{1}{n}$.

$$\varphi(n)=\frac{1}{n}, \qquad \psi(n)=\log n.$$

Donc

$$\log(n+1) - \log n = \frac{1}{n+\theta_n};$$

d'où l'on déduit

$$\log(n+1) - \log n < \frac{1}{n} < \log n - \log(n-1)$$

et, par suite,

$$\log(n+1) < \sum_1^n \frac{1}{n} < 1 + \log n.$$

Si l'on fait croître n indéfiniment, on déduit de là

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \sum_1^n \left(\frac{1}{n} - \log n\right) < 1;$$

d'où l'on déduit que

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{n} - \log n\right)$$

tend vers une limite C comprise entre 0 et 1. C'est la constante d'Euler.

Deuxième exemple. — $\sum \frac{1}{n^s}$.

$$\varphi(n) = \frac{1}{n^s}, \qquad \psi(n) = \frac{n^{1-s}}{1-s},$$

$$\frac{(n+1)^{1-s} - n^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{(n+\theta_n)^s};$$

d'où

$$\frac{(n+1)^{1-s} - n^{1-s}}{1-s} < \frac{1}{n^s} < \frac{n^{1-s} - (n-1)^{1-s}}{1-s},$$

$$\frac{(n+1)^{1-s} - 1}{1-s} < \sum_1^n \frac{1}{n^s} < 1 + \frac{n^{1-s} - 1}{1-s}.$$

Ceci prouve d'abord que si $s > 1$, la série est convergente, et que sa somme est

$$< 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Si $s < 1$, la série est divergente, et l'on a

$$0 < \sum_1^n \left[\left(\frac{1}{n^s}\right) - \frac{(n+1)^{1-s}-1}{1-s}\right] < 1 - \frac{(n+1)^{1-s} - n^s}{1-s}.$$

Ce qui prouve que $\sum_1^n \left[\frac{1}{n^s} - \frac{(n+1)^{1-s}-1}{1-s}\right]$ tend, pour $n = \infty$, vers une limite C_s, $0 < C_s < 1$, généralisation de la constante d'Euler.

Troisième exemple. — $\sum_2^\infty \frac{1}{n \log n}$.

$$\varphi(n) = \frac{1}{n \log n}, \qquad \psi(n) = \log \log n,$$

$$\log \log(n+1) - \log \log n = \frac{1}{(n+\theta_n)\log(n+\theta_n)},$$

$$\log \log(n+1) - \log \log n < \frac{1}{n \log n}$$
$$< \log \log(n) - \log \log(n-1);$$

d'où

$$\log \log(n+1) - \log \log 2 < \sum_2^n \frac{1}{n \log n}$$
$$< \log \log n - \log \log 2 + \frac{1}{2 \log 2}.$$

Comme $\log \log n$ croît indéfiniment, la série est divergente et l'on voit de plus que

$$\sum_2^n (\log \log n - \log \log n)$$

tend vers une limite comprise entre

$$-\log \log 2 \quad \text{et} \quad -\log \log 2 + \frac{1}{2 \log 2}.$$

Quatrième exemple. — $\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha} n}$.

$$\varphi(n) = \frac{1}{n \log^{\alpha} n}, \qquad \psi(n) = \frac{-1}{\alpha - 1} \frac{1}{\log^{\alpha-1} n},$$

$$\frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{1}{\log^{\alpha-1} n} - \frac{1}{\log^{\alpha-1}(n+1)}\right] = \frac{1}{(n+\theta_n)\log^{\alpha}(n+\theta_n)},$$

$$\frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{1}{\log^{\alpha-1} n} - \frac{1}{\log^{\alpha}(n+1)}\right]$$
$$< \frac{1}{n \log^{\alpha} n} < \frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{1}{\log^{\alpha-1}(n-1)} - \frac{1}{\log^{\alpha-1}(n)}\right];$$

d'où

$$\frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{1}{\log^{\alpha-1} 2} - \frac{1}{\log^{\alpha-1}(n+1)}\right]$$
$$< \sum_{2}^{n} \frac{1}{n \log^{\alpha} n} < \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{\log^{\alpha-1} 2} - \frac{1}{\log^{\alpha-1} n}\right) + \frac{1}{2 \log^{\alpha} 2}.$$

Donc, si $\alpha > 1$, la série est convergente, et sa somme est comprise entre

$$\frac{1}{(\alpha - 1)\log^{\alpha-1} 2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(\alpha - 1)\log^{\alpha-1} 2} + \frac{1}{2 \log^{\alpha-2}}.$$

Si $\alpha < 1$, la série est divergente. Considérons

$$\sum_{2}^{\infty}\left(\frac{1}{n \log^{\alpha} n} - \frac{1}{1 - \alpha} \frac{1}{\log^{\alpha-1} n}\right);$$

cette quantité tend vers une limite comprise entre

$$-\frac{1}{(1 - \alpha)\log^{\alpha-1} 2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{(1 - \alpha)\log^{\alpha-1} 2} + \frac{1}{2 \log^{\alpha} 2}.$$

Dans les exemples précédents, la règle de Cauchy suffirait pour décider de la convergence ou de la divergence. Voici un exemple où elle ne suffit plus.

Cinquième exemple. — Soit la série $\sum_1^\infty \frac{\cos(a\log n)}{n}$, a étant quelconque.

$$\varphi(n) = \frac{\cos(a\log n)}{n}, \qquad \psi(n) = \frac{\sin(a\log n)}{a}.$$

Ici la fonction $\psi(n)$ ne tend vers aucune limite quand n croît indéfiniment. Donc, d'après ce qui a été dit plus haut, si l'on démontr eque la série $\sum[\varphi(n+\theta_n)-\varphi(n)]$ est convergente, il sera démontré que la série proposée est convergente.

Or

$$\sum[\varphi(n+\theta_n)-\varphi(n)] = \sum\left\{\frac{\cos[a\log(n+\theta_n)]}{n+\theta_n} - \frac{\cos(a\log n)}{\log n}\right\}$$
$$= \sum \frac{n\,\{\cos[a\log(n+\theta_n)] - \cos(a\log n)\} + \theta_n\cos(a\log n)}{n(n+\theta_n)}$$
$$= \sum \frac{-2n\sin\left[\frac{a}{2}\log n(n+\theta_n)\right]\sin\left[\frac{a}{2}\log\left(1+\frac{\theta_n}{n}\right)\right] + \theta_n\cos(a\log n)}{n(n+\theta_n)}.$$

La série $\sum \frac{\theta_n\cos(a\log n)}{n(n+\theta_n)}$ a ses termes $<$ en valeur absolue que ceux de la série $\frac{1}{n(n-1)}$. Donc elle est convergente.

Quant à l'autre partie de la série

$$\sum \frac{-2\sin\left[\frac{a}{2}\log(n+\theta_n)\right]\sin\left[\frac{a}{2}\log\left(1+\frac{\theta_n}{n}\right)\right]}{n+\theta_n},$$

on a

$$\operatorname{mod}\sin\left[\frac{a}{2}\log n(n+\theta_n)\right] < 1,$$
$$\operatorname{mod}\sin\left[\frac{a}{2}\log\left(1+\frac{\theta_n}{n}\right)\right] < \operatorname{mod}\frac{a}{2}\log\left(1+\frac{\theta_n}{n}\right)$$

pour des valeurs suffisamment grandes de n, *a fortiori* $< \operatorname{mod} \frac{b}{2n}$. Donc le terme général de cette série est $<$ en valeur absolue que

$$\frac{b}{n(n+\theta_n)} < \frac{b}{n(n-1)}.$$

Donc elle est convergente.

Même démonstration pour

$$\sum \frac{\sin(a \log n)}{n}.$$

La même méthode peut servir à démontrer que les séries

$$\sum \frac{\cos(a \log n)}{n \log n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{\sin(a \log n)}{n \log n}$$

sont *convergentes*.