

P. MOLENBROCH

**Sur la représentation géométrique des
points imaginaires dans l'espace**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10
(1891), p. 434-453

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__434_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE
DES POINTS IMAGINAIRES DANS L'ESPACE ;**

PAR M. P. MOLENBROCH, à Amersfort.

Prenons un système de trois axes de coordonnées rectangulaires auquel nous rapportons deux points imaginaires par les quantités

$$(1) \quad x_1 + x_2 \sqrt{-1}, \quad y_1 + y_2 \sqrt{-1}, \quad z_1 + z_2 \sqrt{-1},$$

$$(2) \quad x'_1 + x'_2 \sqrt{-1}, \quad y'_1 + y'_2 \sqrt{-1}, \quad z'_1 + z'_2 \sqrt{-1}.$$

Comme définition fondamentale nous regarderons :

La distance de deux points imaginaires est la quantité d de l'équation (3)

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} d^2 = & [(x_1 - x'_1) + (x_2 - x'_2) \sqrt{-1}]^2 \\ & + [(y_1 - y'_1) + (y_2 - y'_2) \sqrt{-1}]^2 \\ & + [(z_1 - z'_1) + (z_2 - z'_2) \sqrt{-1}]^2. \end{aligned} \right.$$

Cherchons maintenant les points réels, dont la distance au point imaginaire, désigné par (1), s'annule. Si ξ, η, ζ sont les coordonnées réelles d'un de ces points, on aura, d'après la définition,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\xi - x_1 - x_2 \sqrt{-1})^2 \\ & + (\eta - y_1 - y_2 \sqrt{-1})^2 + (\zeta - z_1 - z_2 \sqrt{-1})^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

équation qui se réduit au système suivant

$$(5) \quad (\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2 + (\zeta - z_1)^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$$(6) \quad x_2(\xi - x_1) + y_2(\eta - y_1) + z_2(\zeta - z_1) = 0.$$

La première appartient à une sphère, dont le centre coïncide avec le point x_1, y_1, z_1 ou P_1 , tandis que le

rayon est égal à la quantité $\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$. La seconde équation est celle d'un plan passant par le point P_1 , et perpendiculaire à la droite OP_2 joignant l'origine O des coordonnées aux points x_2, y_2, z_2 ou P_2 .

Les coordonnées ξ, τ, ζ satisfaisant à toutes les deux, le lieu des points réels, dont la distance au point imaginaire (1) s'annule, est une circonférence décrite du point P_1 comme centre avec un rayon égal à OP_2 dans un plan perpendiculaire à OP_2 .

Quand, dans ce qui suit, nous parlerons d'un point imaginaire P , nous désignerons toujours par P_1, P_2 les points réels mentionnés ci-dessus.

Comme représentation géométrique d'un point imaginaire, nous choisirons le lieu des points réels tels que la distance au point imaginaire s'annule.

Le point imaginaire est, par conséquent, représenté par une circonférence. Le centre, le rayon et le plan de cette circonférence seront nommés *centre, rayon* et *plan* du point imaginaire.

Si, à partir du point P_1 , nous traçons une droite P_1P' égale et parallèle à OP_2 , P_1P' sera nommée la normale au point imaginaire. Les coordonnées du point P' ainsi obtenu seront

$$x_1 + x_2, \quad y_1 + y_2, \quad z_1 + z_2.$$

Nous l'appellerons parfois le *pôle* du point imaginaire.

Convenons encore qu'en déterminant la normale à un point imaginaire il faut avoir attention au signe des coordonnées x_2, y_2, z_2 , de sorte que les normales aux deux points imaginaires conjugués (1) et

$$(7) \quad x_1 - x_2\sqrt{-1}, \quad y_1 - y_2\sqrt{-1}, \quad z_1 - z_2\sqrt{-1}$$

aient longueur égale, mais direction contraire.

De cette convention il suit que les pôles des points désignés par (1) et (7) ne coïncident pas non plus. En effet, le pôle du point (7) sera déterminée par les coordonnées

$$x_1 - x_2, \quad y_1 - y_2, \quad z_1 - z_2.$$

Du reste les deux points imaginaires conjugués seront représentés par la même circonférence, puisque les équations (5) et (6) ne changent pas, quand on y remplace x_2, y_2, z_2 par $-x_2, -y_2, -z_2$.

La normale et le pôle de deux points imaginaires conjugués constituent entre ceux-ci une différence, laquelle permet de faire distinction dans la représentation géométrique.

A cet effet, nous pourrons ajouter à chaque circonférence représentant un point imaginaire une flèche indiquant le sens dans lequel on se propose que la circonférence soit parcourue. Cette flèche est toujours telle-ment tracée que le sens de rotation y compris se montre positif, c'est-à-dire en accord avec le sens du mouvement de l'aiguille d'une horloge, quand on regarde la figure du côté où le pôle du point imaginaire se trouve.

A cause de cette convention les flèches ajoutées à deux points imaginaires conjugués auront sens contraires.

En somme, nous pourrons exprimer les réflexions précédentes ainsi :

Tout point imaginaire est représenté par un cycle à rayon et à normale déterminés, parcouru dans un sens positif, quand on le regarde du côté où le pôle du point imaginaire se trouve.

Deux points imaginaires conjugués sont représentés par une seule circonférence parcourue dans les deux sens.

Après avoir établi ces principes, nous pourrions examiner les points imaginaires des surfaces et des courbes réelles connues. Mais ces principes nous permettent en outre d'interpréter géométriquement les équations algébriques à coefficients imaginaires ou bien complexes.

Nous nous proposons de traiter d'abord quelques questions relatives aux points imaginaires du plan, de la sphère et de la droite réels.

Soit donnée l'équation

$$(8) \quad ax + by + cz + d = 0,$$

dans laquelle a, b, c, d sont supposés réels.

Si l'on substitue les quantités désignées par (1) au lieu de x, y, z , il résulte le système

$$(9) \quad ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0, \quad ax_2 + by_2 + cz_2 = 0.$$

La première de ces équations indique que les centres des points imaginaires d'un plan sont situés dans ce plan lui-même, tandis que, selon la seconde, la normale à tout point imaginaire est située dans le plan, ou bien le plan du point imaginaire est perpendiculaire au plan donné. La longueur de cette normale et, par suite, du rayon d'un point imaginaire reste indéterminée.

Prenons ensuite l'ellipsoïde

$$(10) \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 1;$$

a, b, c sont des quantités positives. La substitution des valeurs (1) au lieu de x, y, z ramène cette équation aux deux suivantes :

$$(11) \quad \begin{cases} ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1 = ax_2^2 + by_2^2 + cz_2^2, \\ ax_1x_2 + by_1y_2 + cz_1z_2 = 0. \end{cases}$$

De la dernière de ces relations on peut conclure que la direction de la normale au point imaginaire est cou-

juguée au diamètre de l'ellipsoïde passant par le centre du point imaginaire.

Puisque a, b, c sont des quantités positives, on a, d'après la première des équations (11), l'inégalité

$$ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 > 1.$$

Par suite, les centres des points imaginaires sont situés à l'extérieur de la surface. De plus, cette relation nous fait connaître un second lieu des points x_2, y_2, z_2 correspondant à un centre donné x_1, y_1, z_1 .

En effet, cette équation appartient à un ellipsoïde semblable à l'ellipsoïde donné et ayant ses axes parallèles à ceux de cette surface.

Le rapport constant de deux segments homologues de ces figures est

$$\sqrt{ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1}.$$

On prouve facilement que cette quantité est égale au rapport des longueurs d'une tangente quelconque, menée du point x_1, y_1, z_1 à l'ellipsoïde donné et d'un demi-diamètre parallèle à cette tangente.

Ayant pris arbitrairement un point P_1 à l'extérieur de la surface, qu'on regarde comme centre d'un de ses points imaginaires, on construit les normales correspondantes à ce centre de la manière suivante : Cherchez le plan diamétral conjugué au diamètre passant par P_1 , prolongez les rayons vecteurs joignant le centre de la surface aux points de la section de ce plan diamétral avec l'ellipsoïde dans le rapport mentionné tout à l'heure. Tous ces rayons vecteurs seront des normales correspondantes au centre P_1 .

Un cas particulier est celui où l'on cherche les points imaginaires d'une sphère. On déduit de ce qui précède que les plans de ces points imaginaires passent par le centre de la sphère tandis que le rayon des cycles est

égal à la longueur de la tangente menée de son centre P_1 à la sphère.

Une droite étant représentée par deux équations de la forme (8) donne lieu à deux systèmes d'équations de la forme (9), d'où l'on conclut immédiatement que les centres des points imaginaires d'une droite sont situés sur la droite même, tandis que, quant à la direction, les normales coïncident avec cette droite.

Les points imaginaires d'une droite sont, par conséquent, des circonférences décrites de chacun de ses points avec un rayon arbitraire dans un plan perpendiculaire à la droite.

Nous voulons encore faire attention au cas général qu'une équation

$$(12) \quad f(x, y, z) = 0$$

à coefficients réels soit donnée. En supposant que la fonction f est développable selon le théorème de Taylor et qu'on introduit la notation $\Delta^p f$ au lieu de la différentiation symbolique

$$\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} \right)^p f(x_1, y_1, z_1),$$

la substitution des valeurs désignées par (1) dans l'équation (12) donne

$$(13) \quad \begin{cases} f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{2} \Delta^2 f + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta^4 f - \dots = 0, \\ \Delta f - \frac{1}{2 \cdot 3} \Delta^3 f + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \Delta^5 f - \dots = 0. \end{cases}$$

La forme de ces équations nous fait reconnaître immédiatement que les deux systèmes de valeurs $+x_2, +y_2, +z_2$ et $-x_2, -y_2, -z_2$ y satisferont à la fois. Les points imaginaires d'une surface réelle sont par suite toujours conjugués deux à deux.

Quand deux relations entre x, y, z existent de sorte que l'on considère une courbe réelle dans l'espace, $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ satisferont à deux systèmes d'équations de la forme (13). On pourra donc éliminer entre ces équations soit x_1, y_1, z_1 , soit x_2, y_2, z_2 .

Dans le premier cas, l'équation en x_2, y_2, z_2 résultant de cette élimination représente le lieu du point P_2 , que nous pourrions nommer le lieu décrit par les normales supposées coïncidentes.

Dans le second cas, on obtiendra l'équation du lieu des centres des points imaginaires appartenant à la courbe.

Si la courbe est plane, l'un des deux systèmes de la forme (13) prend la forme (9), de sorte que le lieu des centres des points imaginaires devient le plan de la courbe. En outre, les plans des points imaginaires seront tous perpendiculaires au plan de la courbe donnée.

Nous passerons maintenant à l'interprétation géométrique d'équations à coefficients complexes.

Nous nommerons une équation de degré n à coefficients complexes *équation générale* de ce degré. De plus, nous dirons, comme dans la Géométrie réelle, qu'une seule équation de cette forme représente une surface et que deux équations représentent une courbe que nous distinguerons d'une surface et d'une courbe réelles par les noms *surface* et *courbe générale*.

Ainsi nous pourrions parler d'une surface générale de second degré, d'un plan général, d'une droite générale, etc.

On voit facilement que les points imaginaires des surfaces et des courbes générales ne seront pas conjugués deux à deux. Les deux surfaces réelles, lieux géométriques des points P_1 et P_2 appartenant aux points imaginaires d'une courbe, se trouvent comme dans le cas où les coefficients des équations étaient réels.

Étudions un peu plus exactement le plan général et la droite générale.

Soit l'équation donnée

$$(14) \quad ax + by + cz + d = 0,$$

où les coefficients a, b, c, d seront de la forme

$$a_1 + a_2\sqrt{-1}, \quad b_1 + b_2\sqrt{-1}, \quad \dots$$

Si x, y, z prennent les valeurs complexes désignées par (1), on aura

$$(15) \quad \begin{cases} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1 = a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2, \\ a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2 + a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 + d_2 = 0. \end{cases}$$

Ces équations contenant six variables nous permettent d'exprimer celles-ci par quatre variables indépendantes m, n, u, v de cette manière

$$(16) \quad \begin{cases} x_1 = m(a_1\mathfrak{A}\mathfrak{B} - a_2\mathfrak{A}\mathfrak{b}) + u(b_1c_2 - b_2c_1) \\ \quad + \left(n - \frac{d_1}{\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2}\right)(a_1\mathfrak{C} - a_2\mathfrak{B}\mathfrak{b}), \\ y_1 = m(b_1\mathfrak{A}\mathfrak{B} - b_2\mathfrak{A}\mathfrak{b}) + u(c_1a_2 - c_2a_1) \\ \quad + \left(n - \frac{d_1}{\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2}\right)(b_1\mathfrak{C} - b_2\mathfrak{B}\mathfrak{b}), \\ z_1 = m(c_1\mathfrak{A}\mathfrak{B} - c_2\mathfrak{A}\mathfrak{b}) + u(a_1b_2 - a_2b_1) \\ \quad + \left(n - \frac{d_1}{\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2}\right)(c_1\mathfrak{C} - c_2\mathfrak{B}\mathfrak{b}); \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} x_2 = \left(m - \frac{d_2}{\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2}\right)(a_1\mathfrak{C} - a_2\mathfrak{B}\mathfrak{b}) \\ \quad - n(a_1\mathfrak{A}\mathfrak{B} - a_2\mathfrak{A}\mathfrak{b}) + v(b_1c_2 - b_2c_1), \\ y_2 = \left(m - \frac{d_2}{\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2}\right)(b_1\mathfrak{C} - b_2\mathfrak{B}\mathfrak{b}) \\ \quad - n(b_1\mathfrak{A}\mathfrak{B} - b_2\mathfrak{A}\mathfrak{b}) + v(c_1a_2 - c_2a_1), \\ z_2 = \left(m - \frac{d_2}{\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2}\right)(c_1\mathfrak{C} - c_2\mathfrak{B}\mathfrak{b}) \\ \quad - n(c_1\mathfrak{A}\mathfrak{B} - c_2\mathfrak{A}\mathfrak{b}) + v(a_1b_2 - a_2b_1); \end{cases}$$

où, pour abrégé, a été posé

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = \mathfrak{A}, \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = \mathfrak{B}, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = \mathfrak{C}. \end{array} \right.$$

On voit immédiatement que la direction r , dont les cosinus sont proportionnels à

$$b_1 c_2 - b_2 c_1, \quad c_1 a_2 - c_2 a_1, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

et laquelle est perpendiculaire aux deux directions avec des cosinus proportionnels à $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$, est d'une grande importance au plan général.

En effet, si, comme auparavant, nous désignons les points x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 par P_1 et P_2 , il est clair que le lieu du point P_2 , correspondant à un point P_1 arbitrairement choisi, est une droite parallèle à la direction r et, de plus, que ce lieu ne se déplace pas, quand on fait varier le point P_1 de manière à décrire une droite parallèle à la direction r .

Si nous posons ensuite

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = m(a_1 \mathfrak{B} - a_2 \mathfrak{A}) - n(a_1 \mathfrak{C} - a_2 \mathfrak{B}), \\ \eta_1 = m(b_1 \mathfrak{B} - b_2 \mathfrak{A}) + n(b_1 \mathfrak{C} - b_2 \mathfrak{B}), \\ \zeta_1 = m(c_1 \mathfrak{B} - c_2 \mathfrak{A}) + n(c_1 \mathfrak{C} - c_2 \mathfrak{B}); \end{array} \right.$$

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_2 = m(a_1 \mathfrak{C} - a_2 \mathfrak{B}) - n(a_1 \mathfrak{B} - a_2 \mathfrak{A}), \\ \eta_2 = m(b_1 \mathfrak{C} - b_2 \mathfrak{B}) - n(b_1 \mathfrak{B} - b_2 \mathfrak{A}), \\ \zeta_2 = m(c_1 \mathfrak{C} - c_2 \mathfrak{B}) - n(c_1 \mathfrak{B} - c_2 \mathfrak{A}). \end{array} \right.$$

les points avec les coordonnées

$$\begin{aligned} x_1 - d_1 \frac{a_1 \mathfrak{C} - a_2 \mathfrak{B}}{c_1 \mathfrak{C} - c_2 \mathfrak{B}}, \\ y_1 + d_1 \frac{b_1 \mathfrak{C} - b_2 \mathfrak{B}}{c_1 \mathfrak{C} - c_2 \mathfrak{B}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 + d_1 &= \frac{c_1 \ominus - c_2 \mathbb{1}b}{\mathfrak{a}_b \ominus - \mathbb{1}b^2}; \\ x_2 + d_2 &= \frac{a_1 \ominus - a_2 \mathbb{1}b}{\mathfrak{c}_b \ominus - \mathbb{1}b^2}, \\ y_2 + d_2 &= \frac{b_1 \ominus - b_2 \mathbb{1}b}{\mathfrak{a}_b \ominus - \mathbb{1}b^2}, \\ z_2 + d_2 &= \frac{c_1 \ominus - c_2 \mathbb{1}b}{\mathfrak{c}_b \ominus - \mathbb{1}b^2} \end{aligned}$$

auront évidemment pour projections sur un plan perpendiculaire à la direction r les points $\xi_1, \zeta_1, \zeta_1, \xi_2, \zeta_2, \zeta_2$. Entre des derniers points que nous désignons par Q_1, Q_2 , une correspondance simple aura lieu.

Remarquons, à cet effet, que, des deux termes dans les seconds membres des équations (19), (20), le premier peut être regardé comme mesurant la longueur des projections sur les axes des coordonnées d'un segment pris arbitrairement dans la direction dont les cosinus sont proportionnels à

$$(21) \quad a_1 \mathbb{1}b - a_2 \mathfrak{a}_b, \quad b_1 \mathbb{1}b - b_2 \mathfrak{a}_b, \quad c_1 \mathbb{1}b - c_2 \mathfrak{a}_b,$$

tandis que les seconds termes expriment la longueur des projections d'un segment pris dans la direction avec les cosinus dont le rapport est

$$(22) \quad a_1 \ominus - a_2 \mathbb{1}b, \quad b_1 \ominus - b_2 \mathbb{1}b, \quad c_1 \ominus - c_2 \mathbb{1}b.$$

Ces directions sont toutes les deux perpendiculaires à la direction r , comme on le vérifie facilement à l'aide des cosinus.

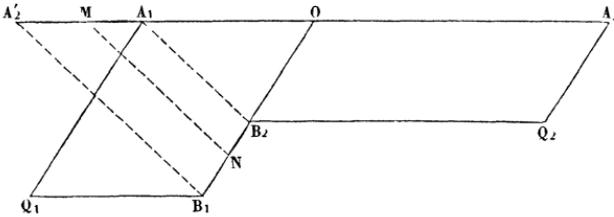
La longueur des deux segments projetés est

$$\begin{aligned} m \sqrt{(a_1 \mathbb{1}b - a_2 \mathfrak{a}_b)^2 + (b_1 \mathbb{1}b - b_2 \mathfrak{a}_b)^2 + (c_1 \mathbb{1}b - c_2 \mathfrak{a}_b)^2} \\ = m \sqrt{\mathfrak{a}_b (\mathfrak{a}_b \ominus - \mathbb{1}b^2)}, \\ n \sqrt{(a_1 \ominus - a_2 \mathbb{1}b)^2 + (b_1 \ominus - b_2 \mathbb{1}b)^2 + (c_1 \ominus - c_2 \mathbb{1}b)^2} \\ = n \sqrt{\ominus (\mathfrak{c}_b \ominus - \mathbb{1}b^2)}. \end{aligned}$$

A partir de l'origine O des coordonnées, traçons deux segments OM , ON dans les directions désignées par (21), (22), dont les longueurs sont respectivement

$$\sqrt{ab(ab\epsilon - \nu b^2)}, \quad \sqrt{\epsilon(ab\epsilon - \nu b^2)}.$$

Prenons dans ces deux directions encore deux segments arbitraires OA_1 , OB_1 sur lesquels nous construi-



sons un parallélogramme. Le quatrième sommet peut être regardé comme le point Q_1 .

Afin de trouver le point correspondant Q_2 , nous observons que les parallèles menées de ce point à OM , ON , rencontrant ces droites en B_2 , A_2 , on aura

$$\frac{OA_1}{OM} = m, \quad \frac{OB_1}{ON} = n, \quad \frac{OA_2}{OM} = -n, \quad \frac{OB_2}{ON} = m.$$

Si l'on prend le point A'_2 tel que $OA'_2 = -OA_2$, de la relation

$$\frac{OA'_2}{OM} = n,$$

combinée avec les équations précédentes, on déduit

$$\frac{OA'_2}{OB} = \frac{OM}{ON} = \frac{OA_2}{OB_2};$$

d'où l'on peut conclure le parallélisme de $B_1A'_2$, de MN et de B_1A_1 . A_1, B_1 étant connus, on pourra trouver facilement A_2, B'_2 et B_2 . Le quatrième sommet du parallé-

logramme construit sur OA_2 , OB_2 sera le point cherché Q_2 .

Ayant déterminé ainsi deux points correspondants Q_1 , Q_2 , traçons, à partir de ces points, deux segments dont les projections sur les axes des coordonnées sont

$$-d_1 \frac{a_1 \varpi - a_2 \mathfrak{b}}{a \varpi - \mathfrak{b}^2}, \quad -d_1 \frac{b_1 \varpi - b_2 \mathfrak{b}}{c \varpi - \mathfrak{b}^2}, \quad -d_1 \frac{c_1 \varpi - c_2 \mathfrak{b}}{a \varpi - \mathfrak{b}^2},$$

$$-d_2 \frac{a_1 \varpi - a_1 \mathfrak{b}}{a \varpi - \mathfrak{b}^2}, \quad -d_2 \frac{b_1 \varpi - b_2 \mathfrak{b}}{c \varpi - \mathfrak{b}^2}, \quad -d_2 \frac{c_1 \varpi - c_2 \mathfrak{b}}{a \varpi - \mathfrak{b}^2};$$

c'est-à-dire deux segments ayant les longueurs

$$d_1 \sqrt{\frac{c \mathfrak{b}}{a \varpi - \mathfrak{b}^2}}, \quad d_2 \sqrt{\frac{c \mathfrak{b}}{c \varpi - \mathfrak{b}^2}},$$

dans une direction qui est perpendiculaire à la direction r et à celle dont les cosinus sont proportionnels à a_2 , b_2 , c_2 .

Des bouts de ces segments, traçons enfin deux parallèles à la direction r .

Ce seront là les droites décrites par les points P_1 , P_2 du point imaginaire.

A chaque point de l'espace considéré comme centre d'un point imaginaire correspond une infinité de normales, dont les bouts forment une droite déterminée parallèle à la direction r .

Un cas particulier est celui où les coefficients a , b , c de l'équation (14) sont réels, tandis que d est imaginaire. Dans les équations précédentes il faudra prendre

$$a_2 = b_2 = c_2 = d_1 = 0.$$

De cette manière on obtient

$$(23) \quad a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 = 0, \quad a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 + d_2 = 0.$$

Le lieu des centres des points imaginaire est, par suite,

le plan passant par l'origine des coordonnées, perpendiculaire à la direction a_1, b_1, c_1 .

A chaque centre correspond une infinité de normales aboutissant dans un autre plan parallèle au plan précédent à une distance

$$-\frac{d_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}.$$

Enfin considérons le système de deux équations linéaires à coefficients complexes ou la droite générale

$$(24) \quad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ ex + fy + gz + h = 0. \end{cases}$$

Afin de trouver les solutions de ce système, nous ne séparerons pas immédiatement les quantités réelles des imaginaires. D'abord remarquons que les équations (24) nous permettent d'exprimer x, y, z à l'aide d'une seule variable indépendante complexe u , ainsi :

$$\begin{aligned} x &= (bg - cf)u + [(b - c)h - (f - g)d]\Delta, \\ y &= (ce - ag)u + [(c - a)h - (g - e)d]\Delta, \\ z &= (af - be)u + [(a - b)h - (e - f)d]\Delta, \end{aligned}$$

où, pour abrégé, nous avons posé

$$\frac{1}{\Delta} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On en conclut qu'en général le système d'équations

$$(25) \quad x = au + d, \quad y = bu + e, \quad z = cu + f,$$

en supposant a, b, c, d, e, f, u complexes, représentera une droite générale.

Maintenant séparons les quantités réelles et imaginaires. Ce procédé fournit les deux systèmes de rela-

lions

$$(28) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 u_1 - a_2 u_2 + d_1, \\ y_1 = b_1 u_1 - b_2 u_2 + e_1, \\ z_1 = c_1 u_1 - c_2 u_2 + f_1; \end{cases}$$

$$(29) \quad \begin{cases} x_2 = a_1 u_2 + a_2 u_1 + d_2, \\ y_2 = b_1 u_2 + b_2 u_1 + e_2, \\ z_2 = c_1 u_2 + c_2 u_1 + f_2. \end{cases}$$

En éliminant u_1, u_2 entre les équations du système (28), et de même entre (29), on aura deux équations linéaires en x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 respectivement, montrant que les lieux des points P_1, P_2 sont deux plans réels. Ces plans sont tous deux perpendiculaires à la direction dont les cosinus sont proportionnels à

$$(30) \quad b_1 c_2 - b_2 c_1, \quad c_1 a_2 - c_2 a_1, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

et par suite parallèles.

Posons encore

$$(31) \quad \begin{cases} \xi_1 = a_1 u_1 - a_2 u_2, \\ \tau_1 = b_1 u_1 - b_2 u_2, \\ \zeta_1 = c_1 u_1 - c_2 u_2; \end{cases}$$

$$(32) \quad \begin{cases} \xi_2 = a_1 u_2 + a_2 u_1, \\ \tau_2 = b_1 u_2 + b_2 u_1, \\ \zeta_2 = c_1 u_2 + c_2 u_1. \end{cases}$$

Il est évident qu'entre les points ξ_1, τ_1, ζ_1 ; ξ_2, τ_2, ζ_2 la même correspondance aura lieu qu'entre les points Q_1, Q_2 définis par les relations (19), (20).

Nous sommes arrivé de cette manière à cette interprétation géométrique de la droite générale.

Déterminons deux directions, dont les cosinus soient proportionnels à a_1, b_1, c_1 ; a_2, b_2, c_2 . Par l'origine des coordonnées menons un plan parallèle à ces directions, c'est-à-dire perpendiculaire à la direction indiquée par (30). Dans ce plan construisons deux points correspondants Q_1, Q_2 à partir desquels nous traçons deux

segments dont les projections sur les axes des coordonnées soient $d_1, e_1, f_1; d_2, e_2, f_2$ respectivement. Les bouts de ces segments seront les points P_1, P_2 appartenant à un point imaginaire.

Chaque centre d'un point imaginaire d'une droite générale n'admet qu'une seule normale.

Aux résultats précédents j'étais parvenu par une étude sur la théorie des quaternions de Hamilton (1). Devant une assemblée du « Wiskundig Genootschap » à Amsterdam, j'eus l'honneur d'exposer quelques-uns de ces résultats. Ce fut M. Korteweg d'Amsterdam, qui, en voulant détacher ma théorie des points imaginaires de la théorie des quaternions, me suggéra le principe mentionné ci-dessus, afin d'arriver à une interprétation géométrique des points imaginaires. Les deux méthodes si différentes conduisirent à la même interprétation. Au savant mathématicien d'Amsterdam, je dois mes remerciements sincères.

Dans ce qui suit, j'ai tâché d'exposer le rapport des questions traitées précédemment à la théorie des quaternions.

Si x, y, z sont les coordonnées rectangulaires d'un point P , i, j, k des vecteurs d'une longueur égale à l'unité dans les directions des axes des coordonnées, le point P , dans la théorie des quaternions, comme on le sait, est donné par l'expression

$$(33) \quad \rho = xi + yj + zk.$$

Quand x, y, z sont complexes de la forme (1), ce

(1) Ces résultats, auxquels Laguerre était parvenu depuis longtemps, ont été exposés par lui, en 1872, dans les *Nouvelles Annales*. Nous avons, néanmoins, publié l'article de M. Molenbroch, parce que son procédé d'exposition est différent et qu'il semble, comme on le verra plus loin, n'avoir pas eu connaissance des travaux de Laguerre.

vecteur devient

$$\rho = x_1 i + y_1 j + z_1 k - \sqrt{-1}(x_2 i - y_2 j + z_2 k)$$

ou bien

$$(34) \quad \rho = \alpha - \sqrt{-1}\beta$$

si, pour abrégér, nous posons

$$(35) \quad x_1 i + y_1 j + z_1 k = \alpha, \quad x_2 i + y_2 j - z_2 k = \beta.$$

α, β sont des vecteurs réels.

Hamilton a appelé un vecteur de la forme (34) *bivecteur*. De ce qui précède, on conclut qu'un bivecteur représente un point imaginaire dans l'espace. α est le vecteur du point avec les coordonnées réelles x_1, y_1, z_1 , c'est-à-dire du centre P_1 du point imaginaire, β représente la normale.

La question nous vient comment il faut comprendre l'effet du facteur $\sqrt{-1}$ opérant à un vecteur.

Le vecteur ρ de l'équation (34) est multiple, c'est-à-dire ce vecteur joint l'origine des coordonnées à chaque point de la circonférence, décrite du bout du vecteur α avec un rayon égal à la longueur du vecteur β dans un plan perpendiculaire à β . L'ensemble de ces vecteurs forme un cône circulaire oblique.

L'expression $\sqrt{-1}\beta$ aura également une infinité de valeurs. Si l'on regarde $\alpha + \sqrt{-1}\beta$ comme le résultat de l'addition du vecteur α à chacun des vecteurs contenus dans le symbole $\sqrt{-1}\beta$, on peut conclure que cette dernière expression représente chaque rayon de la base circulaire du cône mentionné tout à l'heure ou bien $\sqrt{-1}\beta$ représente chaque rayon du point imaginaire.

L'effet de l'opération du facteur $\sqrt{-1}$ au vecteur β est, par suite, que ce vecteur soit fendu de manière à se

transformer dans l'ensemble des rayons d'une circonférence située dans un plan perpendiculaire au vecteur.

Hamilton a déjà reconnu que l'effet de l'opérateur $\sqrt{-1}$ est de tourner un vecteur autour de son origine par un angle droit. Selon ce qui précède, il faut considérer le plan dans lequel cette opération s'effectue comme indéterminé, de sorte que chaque plan passant par le vecteur y prenne part.

La méthode des quaternions nous permet de reconnaître d'une manière fort simple que l'équation (34), d'après les convenances usuelles, doit représenter un cercle. En effet, de cette équation on déduit immédiatement

$$\rho - \alpha - \sqrt{-1}\beta = 0$$

et

$$(36) \quad N(\rho - \alpha - \sqrt{-1}\beta) = 0.$$

où, d'après une formule importante,

$$N(\rho - \alpha) - N\beta + \sqrt{-1}S(\rho - \alpha)\beta = 0.$$

équation se divisant dans ces deux autres

$$(37) \quad N(\rho - \alpha) = N\beta, \quad S(\rho - \alpha)\beta = 0.$$

La première relation indique une sphère décrite du bout du vecteur α avec un rayon égal à la longueur du vecteur β , et la seconde de ces équations appartient à un plan passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à β .

Il n'est pas non plus difficile de montrer que l'équation (36) dans la théorie des quaternions est identique à l'équation (4) de la Géométrie analytique.

Si q, q' sont deux quaternions réduits au même dénominateur, de sorte que

$$(38) \quad q = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad q' = \frac{\beta}{\gamma},$$

nous voulons choisir la définition suivante

$$(39) \quad q + \sqrt{-1}q' = \frac{\alpha + \sqrt{-1}\beta}{\gamma},$$

indiquant que nous considérons une expression de la forme $q + \sqrt{-1}q'$, ou un biquaternion de Hamilton, comme l'ensemble des opérations nécessaires pour transformer un vecteur ordinaire en bivecteur.

D'après ce qui précède, nous pourrions dire aussi : Un biquaternion est l'opérateur fendant un vecteur en bivecteur.

Dans ses *Mathematical papers*, Clifford a donné une interprétation des biquaternions entièrement différente de la nôtre. La simplicité *et en même temps l'acquisition d'une représentation géométrique des points imaginaires me semblent deux avantages de l'interprétation adoptée dans cette Note.*

Avant de finir, je ferai observer encore que MM. Laguerre et Tarry, dans le *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences* (1), ont déjà publié quelques Notes relatives au sujet traité dans la première Partie de cette Note. Pour autant que j'ai eu l'occasion de prendre lecture de ces Notes, il me paraît :

1° Que les considérations des géomètres français ne se rapportent qu'à des figures planes (2);

2° Que leur interprétation géométrique du point imaginaire résulte de la nôtre, si l'on remplace le cycle représentant le point imaginaire par les points d'intersection avec le plan de la figure (Laguerre) ou par la normale au cycle (Tarry);

3° Que la définition d'une droite générale donnée par Tarry dans la Note citée ne peut plus servir quand on considère des figures à trois dimensions, tandis qu'au

(1) Laguerre n'a rien publié dans ce Bulletin.

(2) C'est complètement erroné en ce qui regarde Laguerre.

contraire l'interprétation géométrique que nous avons déduite dans les pages précédentes coïncide avec celle de M. Tarry, si deux coordonnées seulement entrent en considération. C'est la dernière remarque que nous voulons encore prouver.

Quand l'une des coordonnées disparaît, la troisième équation de chacun des systèmes (27), (28), (29) doit être omise. On voit facilement que les coordonnées des points d'intersection du cycle, représentant le point imaginaire, et du plan de la figure seront

$$(39) \quad x = r_1 \mp y_2, \quad y = y_1 \pm r_2.$$

En effet, les droites joignant ces points d'intersection au centre P_1 du cycle sont toutes les deux perpendiculaires à OP_2 et d'une longueur égale à celle de OP_2 .

A cause des valeurs (28), (29) de x_1, y_1, x_2, y_2 , les coordonnées x, y de l'équation (39) prennent la forme

$$(40) \quad \begin{cases} x = a'u_1 - b'u_2 + c' & \text{ou} & a''u_1 + b''u_2 + c'', \\ y = b'u_1 + a'u_2 - d & \text{ou} & b''u_1 - a''u_2 + d'' \end{cases}$$

si, pour abrégé, nous posons

$$\begin{aligned} a' &= a_1 - b_2, & b' &= a_2 - b_1, \\ a'' &= a_1 - b_2, & b'' &= b_1 - a_2. \end{aligned}$$

u_1, u_2 peuvent varier de manière à obtenir toute valeur réelle.

A chaque système de valeurs de u_1, u_2 une couple de points Q, R correspond, liés par une relation simple.

En effet, si à u'_1, u'_2 les points Q', R' correspondent comme à u_1, u_2 les points Q, R, on aura

$$\begin{aligned} \overline{QQ'}^2 &= [a'(u_1 - u'_1) - b'(u_2 - u'_2)]^2 \\ &\quad + [b'(u_1 - u'_1) - a'(u_2 - u'_2)]^2 \\ &= (a'^2 + b'^2)[(u_1 - u'_1)^2 + (u_2 - u'_2)^2], \\ \overline{RR'}^2 &= [a''(u_1 - u'_1) + b''(u_2 - u'_2)]^2 \\ &\quad + [b''(u_1 - u'_1) - a''(u_2 - u'_2)]^2 \\ &= (a''^2 + b''^2)[(u_1 - u'_1)^2 + (u_2 - u'_2)^2]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{QQ'}{RR'} = \sqrt{\frac{a'^2 + b'^2}{a''^2 + b''^2}} = \text{const.}$$

Il s'ensuit que les deux points Q, R en faisant varier u_1, u_2 décrivent des figures semblables, et un examen plus profond fera voir que ces figures sont inversement semblables.

Nous avons obtenu que le couple de points, qui, d'après M. Tarry, représente le point imaginaire, décrit deux figures inversement semblables, quand ce point imaginaire varie de manière à décrire une droite générale. C'est la définition qui a servi à M. Tarry comme point de départ.