HUSQUIN DE RHÉVILLE

Construction géométrique du centre de courbure en un point d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 411-416

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__411_1>

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DU CENTRE DE COURBURE EN UN POINT D'UNE COURBE RAPPORTÉE A DES COORDONNÉES POLAIRES;

PAR M. HUSQUIN DE RHÉVILLE,
Ingénieur civil.

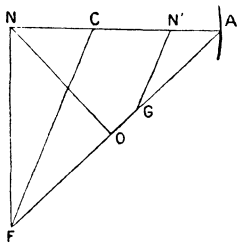
I. Soit O (*fig.* 1) le pôle du système de coordonnées. On sait que le segment ON, limité sur le rayon vecteur d'angle polaire $\omega + \frac{\pi}{2}$ par la normale AN en un point A de coordonnées ρ et ω, a pour valeur

$$ON = \frac{d\rho}{d\omega}.$$

Nous nous proposons d'indiquer une interprétation géométrique des quantités $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$ et $\frac{d^2\omega}{d\rho^2}$.

II. *Représentation géométrique de* $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$. — Soit C le centre de courbure de la courbe au point A : menons NF

Fig. 1.



perpendiculaire à la normale AN jusqu'à sa rencontre en F avec le rayon. Joignons CF et menons-lui la parallèle N'G par le point N' symétrique de N par rapport à C. Cette dernière droite rencontre le rayon OA en un point G, tel que

$$OG = -\frac{d^2\rho}{d\omega^2},$$

le signe — indiquant que le point G tombe sur OA ou sur son prolongement suivant que $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$ est négatif ou positif.

En effet,

$$OG = FG - FO = AN\,\frac{AF}{AC} - AF - \frac{\overline{ON}^2}{OA}.$$

En remplaçant dans cette expression les quantités par les valeurs suivantes

$$\mathrm{AN} = \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \mathrm{AF} = \frac{1}{\rho}\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2\right],$$

$$\mathrm{ON} = \frac{d\rho}{d\omega}, \qquad \mathrm{AC} = \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 - \rho\,\frac{d^2\rho}{d\omega^2}},$$

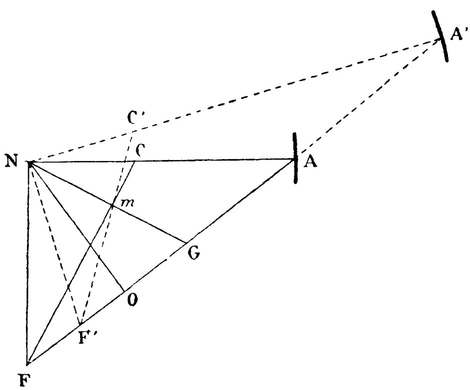
on obtient l'égalité cherchée

$$\mathrm{OG} = -\frac{d^2\rho}{d\omega^2}.$$

III. *Centre de courbure d'une conchoïde.* — Réciproquement, si l'on connaît la valeur de $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$, on peut construire linéairement le centre de courbure C.

Il suffit de porter sur le rayon vecteur OA une longueur $\mathrm{OG} = \frac{d^2\rho}{d\omega^2}$ et de joindre le point F au milieu m

Fig. 2.



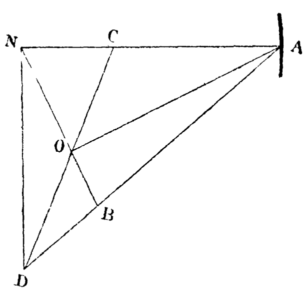
de NG. Cette droite Fm passe au centre de courbure C cherché (*fig.* 2).

Si un point A′ décrit une conchoïde de la courbe donnée, c'est-à-dire si AA′ est constant quel que soit le point A, les quantités $\frac{d\rho}{d\omega}$, $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$ sont identiques en A et en A′ et le point m est fixe quelle que soit la longueur AA′.

Pour construire le centre de courbure C′ de la conchoïde au point A′, on mène NF′ perpendiculaire à la normale NA′ jusqu'à sa rencontre en F′ avec le rayon OA. La droite F m, joignant le point F′ au milieu m de NG, passe au centre de courbure C′ cherché.

IV. *Représentation géométrique de* $\frac{d^2\omega}{d\rho^2}$. — Joignons le centre C de courbure au pôle O et soit D le point de rencontre de cette droite CO avec la perpendiculaire ND à la normale AN (*fig.* 3).

Fig. 3.



La droite AD rencontre ON en un point B tel que

$$OA \times OB = \frac{1}{\frac{d^2\omega}{d\rho^2}}.$$

En effet, le triangle ABN coupé par la transversale COD, nous donne

$$OB = ON \times \frac{AC}{NC} \times \frac{DB}{AD}.$$

On voit facilement que

$$\frac{DB}{AD} = \frac{\overline{ON}^2 + OB.ON}{\overline{AN}^2}.$$

La première égalité devient alors, en y remplaçant $\frac{DB}{AD}$ par sa valeur et en la résolvant par rapport à OB,

$$OB = \frac{\overline{ON}^3 . AC}{\overline{AN}^3 - AC(\overline{AN}^2 - \overline{ON}^2)}.$$

En substituant aux quantités géométriques leurs valeurs en fonction de ρ, $\frac{d\rho}{d\omega}$ et $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$, on obtient, après simplification,

$$OB = -\frac{\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^3}{\rho\frac{d^2\rho}{d\omega^2}}.$$

En se rappelant que

$$\rho = OA, \qquad \frac{d^2\omega}{d\rho^2} = -\frac{d^2\rho}{d\omega^2}\left(\frac{d\omega}{d\rho}\right)^3,$$

ceci peut s'écrire, sous la forme cherchée,

$$OA \times OB = \frac{1}{\frac{d^2\omega}{d\rho^2}}.$$

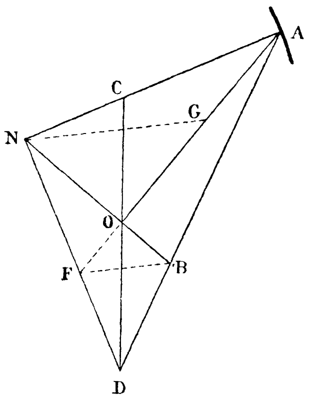
V. Réciproquement, si l'on connaît la valeur de $\frac{d^2\omega}{d\rho^2}$ au point A, on peut construire linéairement le centre C de courbure.

Il suffit de porter sur le rayon vecteur d'angle polaire $\omega + \frac{\pi}{2}$ une longueur OB telle que

$$OB = \frac{1}{\rho\frac{d^2\omega}{d\rho^2}},$$

de joindre AB qui rencontre en D la perpendiculaire ND à la normale AN menée par l'extrémité N de la sous-normale polaire (*fig.* 4).

Fig. 4



La droite DO passe au centre de courbure C cherché.

Remarquons que si, par le point N, on mène une parallèle à la droite FB, elle rencontre le rayon vecteur au point G précédemment défini par la relation

$$OG = -\frac{d^2\rho}{d\omega^2}.$$

En effet,

$$OG = OF\,\frac{ON}{OB} = \frac{\overline{ON}^2}{OA}\,\frac{ON}{OB} = \frac{\overline{ON}^3}{OA.OB}$$

et, comme

$$OA.OB = \frac{1}{\dfrac{d^2\omega}{d\rho^2}}, \qquad ON = \frac{d\rho}{d\omega},$$

on voit que

$$OG = \frac{d^2\omega}{d\rho^2}\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^3 = -\frac{d^2\rho}{d\omega^2}.$$