NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. HIOUX

Cercle tangent à trois cercles donnés

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 399-406

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__399_1>

CERCLE TANGENT A TROIS CERCLES DONNÉS;

PAR M. V. HIOUX,
Professeur au lycée de Nantes.

1. La solution qui suit comprend, comme cas particulier, celle de Gergonne, qui se trouve ainsi complètement justifiée.

Donnons-nous trois cercles (A), (B), (C), de rayons inégaux; plaçons les centres aux trois sommets d'un triangle ABC et, pour fixer les idées, supposons chaque cercle extérieur aux deux autres. Appelons C' le centre

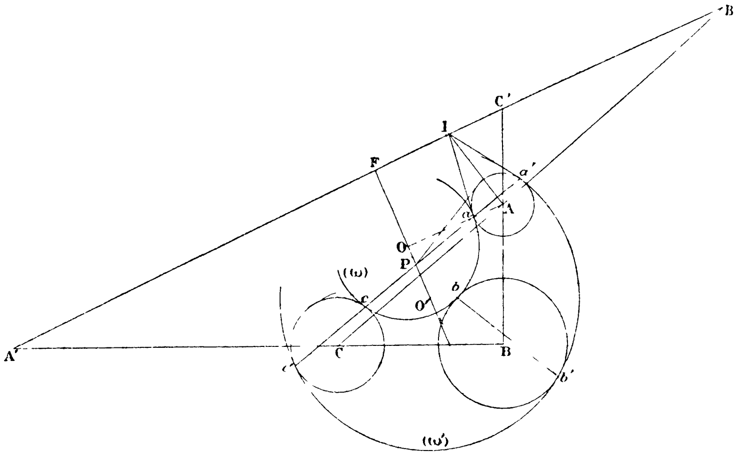
---

la limite de l'erreur sera

$$\alpha \Delta'_B + \beta \Delta'_C - (\alpha + \beta) \Delta'_{B+C} = \alpha (\Delta'_B - \Delta'_{B+C}) + \beta (\Delta'_C - \Delta'_{B+C}),$$

où alors pour Δ'_{B+C} il faudra prendre non la limite supérieure, mais la limite inférieure.

de similitude directe de (A) et de (B); de même A′ le centre de similitude directe de (B) et de (C); enfin B′ le



centre de similitude directe de (C) et de (A). Les centres de similitude inverse correspondants pourront être désignés par C'_1, A'_1, B'_1.

Si un cercle (ω) touche deux quelconques des cercles donnés, (A) et (B) par exemple, en *a* et *b*, les points de contact seront, dans le système (A), (B), (ω), ou deux centres de similitude de même nature, ou deux centres de similitude de nature différente.

En considérant le premier cas, on a les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si les points de contact d'un cercle* (ω) *et de deux cercles* (A) *et* (B) *sont deux centres de similitude de même nature :*

1° *Les points de contact a et b sont antihomologues par rapport au centre de similitude directe* C′ *de* (A) *et de* (B) :

2° *Le cercle* (ω) *coupe orthogonalement un cercle fixe* (H) *de centre* C′.

3° *Le cercle* (H) *a le même axe radical que les cercles* (A) *et* (B).

Démonstration. — 1° On observe d'abord que les trois centres de similitude a, b et C' sont en ligne droite, puisque les deux premiers sont de même nature et que C' est un centre de similitude directe.

Soit M le point de rencontre des tangentes à (ω) en a et b; ces tangentes sont égales et par suite le point M est sur l'axe radical de (A) et (B); il suit de là que les points a et b sont antihomologues par rapport au point C', l'une des origines d'inversion de (A) et de (B).

2° Soit λ la puissance d'inversion pour le point C'. On a

$$C'a \times C'b = \lambda.$$

Donc le cercle (ω) coupe orthogonalement un cercle (H), de centre C' et de rayon $\sqrt{\lambda}$.

3° On observe d'abord que tout cercle passant par les points a et b de (A) et de (B), antihomologues par rapport à C', coupe orthogonalement le cercle d'inversion (H) relatif à C'.

Considérons en particulier le cercle (ω_1) de centre M et de rayon $Ma = Mb$; il coupe orthogonalement les cercles donnés. Soit m un de ses points de rencontre avec (H). On a $C'a \times C'b = \lambda = \overline{C'm}^2$: donc $C'm$ est une tangente menée de C' au cercle (ω_1). Dès lors Mm est perpendiculaire sur $C'm$ et se trouve tangent à (H) en m. On a $Ma = Mb = Mm$. Le point M est d'égale puissance par rapport à (A), (B) et (H), dont les centres sont sur la même droite AB.

Les trois cercles ont donc le même axe radical.

C. Q. F. D.

Théorème II. — *Si un cercle* (ω) *coupe orthogo-*

nalement le cercle d'inversion (H) *et touche* (A) *en a, il touche également* (B) *en un point b antihomologue de a par rapport au centre de similitude directe* C'.

En effet, si l'on forme la figure inverse du système (A), (ω) et (H) en prenant C' pour origine et λ pour module, le cercle (H) se conserve, le cercle (ω) est à lui-même son inverse et vient toucher l'inverse de (A) qui est (B) en un point b, anti-homologue de a sur la droite C'a.

C. Q. F. D.

2. Cela posé, soit (ω) un cercle touchant (A), (B) et (C) respectivement en a, b et c, les points de contact étant des centres de similitude de même nature pour le groupe (A, B) d'une part, pour le groupe (A, C) d'autre part, et par suite pour le groupe (B, C).

Soit (H) le cercle d'inversion de centre C' pour (A) et (B); soit de même (K) le cercle d'inversion de centre B' pour (A) et (C). Le cercle cherché (ω) doit couper orthogonalement chacun des cercles d'inversion (H) et (K). Donc, en vertu du théorème II, on est ramené au problème suivant :

Tracer un cercle coupant orthogonalement les cercles d'inversion (H) *et* (K) *et touchant l'un des cercles donnés, le cercle* (A) *par exemple.*

La solution du problème dépend des deux lemmes suivants :

LEMME I. — *Tous les cercles coupant orthogonalement les cercles* (H) et (K) *ont pour axe radical la ligne des centres* C'B' *de ces deux cercles, c'est-à-dire l'axe de similitude directe des cercles proposés.*

Considérons en effet deux quelconques de ces cercles (ω_1) et (ω_2) : ils sont coupés orthogonalement par (H) et par (K); donc leur axe radical passe par C′, centre de (H), et par B′, centre de (K); cet axe radical est donc la droite C′B′. C. Q. F. D.

Lemme II. — *L'axe radical du cercle* (A), *par exemple, et d'un cercle variable* (ω_1) *coupant orthogonalement* (H) *et* (K) *tourne autour d'un point fixe* (I) *de l'axe de similitude directe des cercles donnés, quand le centre de* (ω_1) *se déplace sur l'axe radical de* (H) *et de* (K).

Au cercle (A), associons deux cercles (ω_1) et (ω_2) orthogonaux à (H) et (K); leur centre radical I est un point de l'axe radical de (ω_1) et (ω_2), c'est-à-dire un point de C′B′; si l'on fait varier le cercle (ω_1) toujours orthogonal à (H) et à (K), le point I, intersection des deux axes radicaux fixes, ne changera pas; donc l'axe radical tournera autour du point I. C. Q. F. D.

Remarque. — Sans tracer les cercles (H) et (K), on peut obtenir à volonté un cercle (ω_1) qui les coupe orthogonalement.

Pour cela, il suffit de se donner un point p sur (A) et de construire son antihomologue q sur (B) par rapport à C′ et son antihomologue p sur (C) par rapport à B′.

On sait que tout cercle passant par p et q coupe orthogonalement le cercle (H) et que tout cercle passant par p et r coupe orthogonalement le cercle (K). Donc un cercle (ω_1) circonscrit au triangle pqr coupera orthogonalement les deux cercles (H) et (K). En menant du centre O_1 de (ω_1) la perpendiculaire sur l'axe de similitude directe des cercles donnés, on aura l'axe radical de (H) et (K) [1].

---

[1] En outre, l'axe radical de (ω_1) et de (A) fournit le point I par

3. On peut maintenant résoudre le problème en question d'une manière tout à fait générale :

Règle générale. — Pour tracer un cercle (ω) touchant *de la même manière* trois cercles donnés (A), (B) et (C) :

1° Construisez l'axe de similitude directe des cercles donnés et tracez un cercle (ω_1) coupant orthogonalement les cercles d'inversion (H) et (K);

2° Du centre O_1 de (ω_1) menez la perpendiculaire O_1F sur l'axe de similitude et construisez l'axe radical de (ω_1) et du cercle (A), par exemple, lequel coupe en I l'axe de similitude en question;

3° Du point I menez la tangente Ia au cercle (A) et prolongez le rayon Aa de ce cercle jusqu'à sa rencontre en O avec O_1F. Le cercle (ω) de centre O et de rayon Oa répond à la question.

Il y a deux solutions; car du point I on peut, en général, mener une deuxième tangente Ia' au cercle (A), ce qui fournit un deuxième cercle (ω') répondant également à la question.

Ce procédé de solution n'exige pas que le centre radical des cercles donnés soit à distance finie.

Mais, comme c'est le cas le plus intéressant, il est bon de l'étudier d'une façon toute particulière.

4. Soit P le centre radical des cercles donnés : c'est le centre d'un cercle (R) coupant orthogonalement les cercles donnes; il coupe aussi orthogonalement chacun des cercles (H) et (K), par suite d'une propriété déjà démontrée. L'axe radical des cercles (H) et (K) est donc la perpendiculaire PF menée du point P sur l'axe de

---

où vient passer la tangente en a au cercle (A) et au cercle cherché (ω)

similitude directe des cercles proposés. En outre, pour la détermination du point I, le cercle radical (R) peut ici tenir lieu du cercle (ω_1) déjà considéré.

On est ainsi conduit à la règle suivante :

Règle particulière. — Pour tracer un cercle touchant *de la même manière* trois cercles (A), (B), (C) dont les centres ne sont pas en ligne droite :

1° Construisez l'axe de similitude directe et le centre radical P des trois cercles et menez de ce point la perpendiculaire PF sur l'axe en question ;

2° Déterminez le point de rencontre I de cet axe et de la polaire du point P par rapport au cercle (A), par exemple, et du point I menez les tangentes Ia et Ia' à ce cercle ;

3° Tracez les rayons Aa et Aa' et prolongez-les jusqu'à la droite PF en O et en O'. Vous avez ainsi les centres de deux cercles (ω) et (ω') qui répondent à la question et qui touchent (A) en a et en a'.

Remarque. — La corde de contact aa', polaire du point I par rapport au cercle (A), passe en P, puisque I est sur la polaire de P. Soit α le pôle par rapport à (A) de l'axe de similitude directe; ce pôle est sur aa'. Cette droite est donc déterminée par ce pôle α et le point P.

On verrait de même que, si bb' est la corde de contact de (B) avec (ω) et (ω'), elle passe par P et par β, pôle par rapport à (B) de l'axe de similitude. Même observation pour la corde de contact cc' de (C) avec (ω) et (ω').

Corollaire. — La solution de Gergonne est une conséquence de la précédente et se trouve dès lors complètement justifiée.

Observation finale. — Les cercles d'inversion (H) et (K) n'interviennent que par leur axe radical PF. Or que les modules correspondant à deux cercles d'inversion soient positifs ou négatifs, leur axe radical sera toujours la perpendiculaire menée de P sur l'axe de similitude qui contient leurs centres.

On est ainsi conduit à appliquer la construction précédente à l'un quelconque des quatre axes de similitude, en observant que les cercles (ω) et (ω') ne toucheront plus de la même manière les trois cercles donnés. La polaire déjà utilisée du point P par rapport au cercle (A) servira pour chacun des axes de similitude. On a ainsi, en général, quatre groupes de deux, c'est-à-dire huit cercles tangents à trois cercles donnés.

La même méthode s'applique quand l'un des cercles est remplacé par une droite ou par un point et, en général, quand on conserve au moins un cercle sur trois.