Nouvelles annales de mathématiques

Vladislas Puchewicz

Note sur les approximations dans le calcul logarithmique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 393-399

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__393_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

NOTE SUR LES APPROXIMATIONS DANS LE CALCUL LOGARITHMIQUE;

PAR M. VLADISLAS PUCHEWICZ.

Les auteurs des manuels d'Algèbre, en parlant de l'approximation d'un nombre donné par son logarithme, font la remarque que, la différence tabulaire étant Δ, on ne peut obtenir le nombre qu'approché à $\frac{1}{\Delta}$: remarque qui serait tout à fait juste, si le logarithme à l'aide duquel nous calculons le nombre, ainsi que le logarithme tabulaire, étaient exacts. Mais, comme le logarithme tabulaire n'est approché qu'à $\frac{1}{2}$(1), les différences qu'à 1, et le logarithme du nombre cherché, résultat en général des opérations sur d'autres logarithmes, qu'à une approximation variable, cette remarque ne nous suffit pas à définir l'approximation d'un nombre calculé à l'aide des logarithmes. Même M. Vieille, dans son ouvrage spécial : *Théorie générale des approximations numériques*, en s'occupant minutieusement des erreurs provenant de l'hypothèse de la proportionnalité des petits accroissements des nombres et de leurs logarithmes, ne résout pourtant pas la question générale.

Dans cette Note, je démontre que l'on peut toujours obtenir le logarithme d'un nombre approché à $\frac{1}{2}$, je cal-

(1) Lorsque je parle d'un logarithme, j'appelle *unité* l'unité du rang du dernier chiffre des logarithmes tabulaires; lorsque je parle d'un nombre, le même mot désigne l'unité du rang du dernier chiffre des nombres tabulaires. Je crois que ce double emploi du même mot ne présentera aucune difficulté au lecteur.

cule l'approximation d'un nombre trouvé à l'aide de son logarithme, étant donnée l'approximation de ce logarithme, et j'applique ces règles dans un exemple numérique. Je ne mentionne pas des erreurs provenant de la proportionnalité, car, comme on le sait, elles sont négligeables en présence des erreurs provenant de l'inexactitude des logarithmes tabulaires.

Soient ε_1 et ε_2 les erreurs des deux logarithmes tabulaires consécutifs, $\gamma = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ l'erreur de la différence tabulaire, et d la partie fractionnaire du nombre dont nous désirons obtenir le logarithme. L'erreur, dans ce logarithme, sera alors la somme des erreurs du logarithme tabulaire et de l'accroissement calculé à l'aide de la différence; cette erreur sera donc

$$\varepsilon_1 + d\gamma. \tag{1}$$

Comme la limite de ε_1 est $\frac{1}{2}$, et que la limite de γ est 1, on pourrait croire, au premier coup d'œil, que la limite de (1) est $1\frac{1}{2}$; nous démontrerons que cette limite est égale à $\frac{1}{2}$.

Nous remarquons qu'il peut se présenter les trois cas suivants : 1° ε_1 et ε_2 sont de mêmes signes, et, quant à la valeur numérique, ε_1 est plus grand que ε_2 ; 2° ils sont de mêmes signes, mais la valeur numérique de ε_2 est plus grande que celle de ε_1 ; 3° ils sont de signes contraires.

Dans le premier cas, γ est moindre que $\frac{1}{2}$ et du signe contraire à ε_1, et comme d est une fraction proprement dite, l'expression (1) est une différence de deux fractions, chacune moindre que $\frac{1}{2}$; par suite cette expression même est moindre que $\frac{1}{2}$.

Dans le deuxième cas, γ est aussi moindre que $\frac{1}{2}$, mais est du signe contraire à ε_1 ; or, si l'on remplace ε_1 par

$\varepsilon_2 - \gamma$, on obtient

$$\varepsilon_2 - \gamma + d\gamma = \varepsilon_2 - (1 - d)\gamma,$$

et cette expression, où γ est du même signe que ε_2, est de nouveau une différence de deux fractions, chacune moindre que $\frac{1}{2}$.

Dans le troisième cas, γ peut être plus grand que $\frac{1}{2}$; mais, si nous mettons dans (1) $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ à la place de γ, nous obtenons

$$\varepsilon_1 + d(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = (1 - d)\varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

et, comme ε_1 et ε_2 sont de signes contraires, nous avons de nouveau la différence de deux fractions dont chacune est moindre que $\frac{1}{2}$.

Nous voyons donc que, si nous tâchons d'obtenir le résultat avec la plus grande approximation possible, il ne faut pas rejeter dans l'accroissement du logarithme les chiffres du rang inférieur à celui des *unités* des logarithmes. Même dans les calculs élémentaires, il serait bon de retenir ces chiffres, surtout lorsqu'on doit multiplier le logarithme par un nombre entier.

Nous avons supposé jusqu'à présent que le nombre dont nous voulions calculer le logarithme, ainsi que sa partie fractionnaire d, étaient exacts : si le nombre n'était qu'approché à α, il faudrait, avant tout, connaître l'erreur qui en résultera pour le logarithme. Cette erreur aura pour limite $\alpha\Delta'$, où Δ' est la limite supérieure de la différence tabulaire. On trouve cette limite supérieure en comparant la différence à côté du nombre donné avec les différences voisines.

A l'aide de ces règles, nous pourrons toujours définir la limite de l'erreur dans un logarithme résultant des opérations sur d'autres logarithmes et représentant le logarithme du nombre cherché : cette limite pourra être mise sous la forme $m.\frac{1}{2}$. Si nous calculons le nombre correspondant à un tel logarithme, nous devons ajouter au nombre tabulaire la fraction $\frac{\delta}{\Delta}$, où Δ est la différence tabulaire, et δ la différence entre notre logarithme et le logarithme tabulaire. L'approximation de Δ est 1, c'est-à-dire $2.\frac{1}{2}$, et celle de δ est $(m+1)\frac{1}{2}$. Cherchons l'erreur absolue de la fraction $\frac{\delta}{\Delta}$, d'après la formule

$$\frac{\delta+\beta}{\Delta+\gamma}-\frac{\delta}{\Delta}=\frac{\Delta\beta-\delta\gamma}{(\Delta+\gamma)\Delta}.$$

Pour trouver la limite supérieure de cette fraction, remarquons que δ et Δ sont positifs, et représentons par β' et γ' les valeurs absolues de β et γ. Le numérateur de cette fraction ne peut pas être plus grand que $\Delta\beta'+\delta\gamma'$, et, *a fortiori*, que $\Delta(\beta'+\gamma')$; le dénominateur ne peut pas être plus petit que $(\Delta-\gamma')\Delta$, de manière que la fraction ne peut pas être plus grande que $\frac{\beta'+\gamma'}{\Delta-\gamma'}$. En substituant pour β' et γ' leurs valeurs limites $(m+1)\frac{1}{2}$ et 1, nous obtenons la valeur limite de l'erreur

$$\frac{m+3}{2(\Delta-1)}. \tag{2}$$

Comme, en général, la division $\delta:\Delta$ ne s'effectue pas exactement, il faudra ajouter encore à cette limite une fraction $\frac{r}{\Delta}$ (r étant le reste de la division $\delta:\Delta$), fraction qui pourra être remplacée dans la limite par $\frac{r}{\Delta-1}$.

Dans le cas où l'on trouve le logarithme dans les tables, la limite de l'erreur est

$$\frac{m-1}{2(\Delta-1)}. \tag{2'}$$

parce qu'alors il faut mettre $\delta = 0$, à cause de quoi le terme $\delta\gamma$ disparaît dans le numérateur.

La fraction (2') représente la limite de ce qu'on devrait ajouter au nombre tabulaire, si le logarithme qui nous sert à calculer le nombre, ainsi que le logarithme tabulaire, pouvaient être donnés exactement.

Comme exemple, calculons la surface d'un triangle par la formule

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B + C)},$$

où

$$a = 413,386, \qquad B = 36^\circ 47' 23'', \qquad C = 49^\circ 25' 40''.$$

Le calcul sera

$\log a^2 =$	$5,2327116$	approché à	$2\frac{1}{2}$
$\log \sin B =$	$\bar{1},77733976$	»	$1\frac{1}{2}$
$\log \sin C =$	$\bar{1},8805774$	»	$1\frac{1}{2}$
$\log 2 =$	$\bar{1},6989700$	[1]	
$\log \sin(B + C) =$	$0,00094708$	»	$1\frac{1}{2}$
$\log S =$	$4,59054584$	approché à	$5\frac{1}{2}$

Nous trouverons dans les tables cinq chiffres entiers : 38953 auxquels il faudra ajouter la fraction $\frac{49,4}{112}$ en tenant compte de l'erreur $\frac{5+3}{2.111} = \frac{4}{111}$.

En effectuant la division $49,4 : 112$, nous obtenons le premier chiffre du quotient 4 et le reste 4,6; le second chiffre du quotient sera aussi 4, et le reste correspon-

---

(1) Nous ne marquons pas l'approximation de log 2, car, si même on prenait ce logarithme avec huit chiffres, il serait 0,30103000, sa valeur plus exacte étant 0,301029995 66....

Comme le nombre 2 entre souvent dans les calculs, il vaut la peine de se souvenir que son logarithme n'augmente pas l'erreur, excepté le cas où il serait multiplié par un nombre considérable.

dant 0,12. Si nous prenons $S = 38953,4$, cette valeur sera en tout cas trop petite, la partie omise de l'accroissement $\frac{4,6}{112}$ étant plus grande que l'erreur du sens indéfini $\frac{4}{111}$; mais l'erreur par défaut sera moindre que $\frac{8,6}{111}$, et aussi moindre que 0,1. Si nous prenons $S = 38953,44$, la limite de l'erreur sera $\frac{4,12}{111}$, moindre que 0,04.

Supposons maintenant que les données de ce calcul ne sont pas des nombres exacts, mais approchés eux-mêmes à $\frac{1}{2}$ de leur dernier chiffre. Conformément à la signification convenue du mot *unité* dans le nombre, la limite de cette erreur aura pour chaque nombre l'expression $\frac{1}{20}$.

Pour le nombre a, la différence tabulaire est 105; mais, après 105, nous trouvons des différences 106 : donc, pour limite supérieure de cette différence, il faut prendre 106, et l'erreur du logarithme de a^2, provenant de l'inexactitude du nombre, aura pour limite

$$2.\tfrac{1}{20}.106 = 21,2\tfrac{1}{2}.$$

On pourrait calculer de même les limites dans les logarithmes des sinus, mais nous rencontrons dans cet exemple un cas spécial : $(B + C)$ étant moindre que 90°, les erreurs de B et de C donnent des erreurs de même sens dans les logarithmes des sin B et sin C que dans le logarithme de $\sin (B + C)$, et, comme ce dernier logarithme doit être retranché de la somme des deux premiers, l'erreur totale sera aussi la différence des erreurs correspondantes (¹). Nous obtenons pour limite de ces

(¹) Désignons les erreurs de B et C par α et β (qui sont de signes indéterminés), l'erreur de $(B + C)$ sera alors $(\alpha + \beta)$; désignons les limites des différences tabulaires correspondantes par Δ'_B, Δ'_C et Δ'_{B+C};

trois erreurs $\frac{1}{20}(282 - 13) + \frac{1}{20}(181 - 13) = 43,7\frac{1}{2}$, de manière que la limite de l'erreur totale, dans le logarithme, sera

$$(5 + 21,2 + 43,7)\tfrac{1}{2}, \text{ c'est-à-dire } 70\tfrac{1}{2},$$

et la limite de l'erreur dans le nombre $\frac{73}{2.111} = \frac{36,5}{111}$.

L'accroissement du nombre étant comme auparavant $\frac{49,4}{112}$, si l'on prend pour S les cinq chiffres entiers, on a une valeur de S approchée par défaut à moins de $\frac{85,9}{111}$, c'est-à-dire à moins d'une unité. Si l'on prend S avec le premier chiffre décimal, le sens de l'erreur reste indéterminé, et la limite de l'erreur est $\frac{36,5}{111} + \frac{4,6}{112}$, c'est-à-dire moindre que 0,4.