

ROBERJOT

**Sur le mouvement d'un corps solide
autour d'un point fixe**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10
(1891), p. 365-370

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__365_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR
D'UN POINT FIXE;**

PAR M. ROBERJOT,

Étudiant à la Faculté des Sciences de Lyon.

— — —

Je me propose d'étudier ce mouvement sans employer
d'axes particuliers; d'obtenir ainsi les résultats connus

et de donner des équations du mouvement une *interprétation géométrique simple*.

p, q, r désignant les composantes de l'axe instantané de rotation, on a pour la vitesse et l'accélération d'un point du corps solide

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{dx}{dt} = qz - ry, & \frac{d^2x}{dt^2} = z \frac{dq}{dt} - y \frac{dr}{dt} - \omega^2 x + p(px + qy + rz) \\ \frac{dy}{dt} = rx - pz, & \frac{d^2y}{dt^2} = x \frac{dr}{dt} - z \frac{dp}{dt} - \omega^2 y + q(px + qy + rz) \\ \frac{dz}{dt} = py - qx, & \frac{d^2z}{dt^2} = y \frac{dp}{dt} - x \frac{dq}{dt} - \omega^2 z + r(px + qy + rz) \end{array} \right.$$

Nous poserons

$$\begin{array}{lll} A = \Sigma m(y^2 + z^2), & B = \Sigma m(z^2 + x^2), & C = \Sigma m(x^2 + y^2), \\ D = \Sigma myz, & E = \Sigma mzx, & F = \Sigma mxy. \end{array}$$

Force vive totale du système. - Soit T cette force vive, on a

$$2T = \Sigma m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]$$

ou

$$(2) \quad 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq.$$

Moment résultant des quantités de mouvement.

Les composantes α, β, γ de l'axe de ce moment sont

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha = \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = Aq - Fq - Er & \text{ou} \quad \alpha = \frac{\partial T}{\partial p}, \\ \beta = \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = -Fp + Bq - Dr & \text{ou} \quad \beta = \frac{\partial T}{\partial q}, \\ \gamma = \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = -Ep - Dq + Cr & \text{ou} \quad \gamma = \frac{\partial T}{\partial r}. \end{array} \right.$$

Remarquons que

$$2T = p\alpha - q\beta + r\gamma.$$

Équations générales du mouvement — Appliquons

le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport aux trois axes; désignons par a, b, c les composantes de l'axe des moments des forces appliquées; nous aurons

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = a,$$

ou

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr - F \frac{dq}{dt} - E \frac{dr}{dt} \\ + Fpr - Epq - Dq^2 - Dr^2 = a, \end{aligned}$$

de même

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} + q\gamma - r\beta &= a, \\ \frac{d\beta}{dt} + rz - p\gamma &= b, \\ \frac{d\gamma}{dt} + p\beta - qz &= c. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les équations du mouvement.

Remarque. — On en tire facilement les relations suivantes

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} x \frac{dx}{dt} + \beta \frac{d\beta}{dt} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} &= p \frac{dx}{dt} + q \frac{d\beta}{dt} + r \frac{d\gamma}{dt} \\ &= x \frac{dp}{dt} + \beta \frac{dq}{dt} + \gamma \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{dT}{dt} = ax + b\beta + c\gamma \\ &= ap + bq + cr. \end{aligned} \right.$$

On voit que

$$(6) \quad x^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2T - h,$$

c'est-à-dire que la différence entre le travail total et le carré de l'axe $OC = l$ du moment résultant des quan-

ités de mouvement, est constante

$$(6) \quad 2T - l^2 = h.$$

Théorèmes de Poinsot. — 1° On a

$$2T = \frac{\omega^2}{\rho^2};$$

ω désignant la vitesse instantanée et ρ la distance au point fixe du point K où l'axe instantané perce l'ellipsoïde d'inertie, il suffit d'écrire que le point K

$$\left(\rho \frac{P}{\omega}, \rho \frac{Q}{\omega}, \rho \frac{R}{\omega} \right) .$$

est sur l'ellipsoïde d'inertie.

2° Le plan tangent en K à l'ellipsoïde d'inertie est perpendiculaire à l'axe OC ; l'équation de ce plan est, en effet,

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + f'_l = 0,$$

où

$$x = \rho \frac{P}{\omega}, \quad y = \rho \frac{Q}{\omega}, \quad z = \rho \frac{R}{\omega};$$

or

$$f'_x = \Lambda x - Fy - Ez = (\Lambda P - FQ - ER) \frac{\rho}{\omega} = \frac{\rho \alpha}{\omega};$$

donc l'équation du plan

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = \frac{\omega}{\rho};$$

il est perpendiculaire à OC .

3° La distance de l'origine à ce plan tangent est

$$\delta = \frac{\frac{\omega}{\rho}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \frac{\omega}{l\rho}.$$

La relation

$$2T = l^2 - h$$

peut donc s'écrire

$$\frac{\omega^2}{\rho^2} = l^2 - h$$

ou

$$\delta^2 - 1 = -\frac{h}{l^2}.$$

Remarque I. — Si, à un moment donné,

$$p = \alpha, \quad q = \beta, \quad r = \gamma,$$

les équations du mouvement se réduisent à

$$2T = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = l^2 = \omega^2;$$

on a

$$\delta = \rho = 1.$$

Remarque II. — Si $a = b = c = 0$, les équations se réduisent à

$$\alpha \frac{d\alpha}{dt} + \beta \frac{d\beta}{dt} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} = 0$$

ou

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \text{const.}$$

$OC = l$ est constant, et

$$\frac{dT}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad T = h, \quad h = \text{const.}$$

d'où

$$\delta = \frac{\sqrt{h}}{l} = \text{const.}$$

On en déduira, par la méthode de Poinsot, les équations de la polhodie et de l'erpolhodie.

Interprétation géométrique des équations (4) du mouvement. — Remarquons que $q\gamma - r\beta$, $r\alpha - p\gamma$ et $p\beta - q\alpha$ sont les composantes de la vitesse du point $C(\alpha, \beta, \gamma)$ considéré comme faisant partie du corps solide; désignons-les par $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, $\frac{\partial \beta}{\partial t}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$; $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ sont les com-

posantes de la vitesse du point $C(x, \beta, \gamma)$ considéré comme l'extrémité de l'axe résultant du moment des quantités de mouvement. Les équations (4) du mouvement peuvent donc s'écrire

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} = a, \\ \frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial \beta}{\partial t} = b, \\ \frac{d\gamma}{dt} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} = c. \end{array} \right.$$

Elles expriment que la résultante de la vitesse du point $C(x, \beta, \gamma)$, considéré comme point matériel du corps solide, et de la vitesse du point géométrique $C(x, \beta, \gamma)$, considéré comme extrémité de l'axe résultant du moment des quantités de mouvement, est égale en grandeur et en direction à l'axe résultant OA des moments des forces extérieures.

On peut considérer la courbe S lieu des points C dans le solide et la courbe M lieu des mêmes points dans l'espace, de sorte que les différents points C', C'', \dots du corps solide viendront coïncider successivement avec les points C', C'', \dots de l'espace; en d'autres termes, le cône de sommet O de base S roulera en glissant sur le cône de sommet O et de base M et la vitesse de glissement est (a, b, c) .

Si $a = b = c = 0$, on a

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \dots$$
