NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1891)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 347-350

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__347_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1891).

Mathématiques élémentaires.

On donne une sphère S et deux droites D, D′, tangentes à cette sphère.

1° Par un point quelconque de la droite D on mène les droites G et G′ qui touchent la sphère S et rencontrent la droite D′; démontrer que les points de contact des droites G et G′ avec la sphère S décrivent deux cercles C et C′.

2° Démontrer que les droites G, qui touchent la sphère S en des points situés sur le cercle C, sont tangentes à une infinité de sphères Σ.

3° Trouver combien il y a de sphères Σ tangentes à un plan donné Q. Discuter le problème et trouver le lieu des traces des droites G sur le plan Q.

Mathématiques spéciales.

Étant donnés un triangle ABC et deux points P et Q situés dans son plan, on considère les coniques S qui touchent le côté CA en A et passent par les points P et Q; on considère de même les coniques S′ qui touchent le côté CB en B et passent par les points P et Q.

1° Soient M et N les points d'intersection d'une conique S avec les droites CP et CQ; M′ et N′ les points d'intersection d'une conique S′ avec les mêmes droites. Démontrer que la droite MN passe par un point fixe A_1 et la droite M′N′ par un point fixe B_1, quand les coniques S et S′ varient.

2° En substituant le triangle CA_1B_1 au triangle CAB dans la définition des deux séries de coniques, on obtiendra deux nouveaux points A_2, B_2 et ainsi de suite; trouver l'équation de la droite A_nB_n et chercher sa position limite quand n devient infini.

3° On suppose que les coniques S et S′ varient de manière que les deuxièmes tangentes menées du point C à ces courbes soient conjuguées harmoniques par rapport aux droites CP et CQ; trouver, dans cette hypothèse, le lieu du point d'intersection des polaires d'un point donné H par rapport à ces coniques.

4° Lorsque les coniques S et S′ varient en restant tangentes, trouver le lieu de leur point de contact.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

Étant donnée l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

dans laquelle z désigne une fonction des deux variables indépendantes x et y et où l'on a posé

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

définir ce que l'on entend : 1° par intégrale complète, intégrale générale, intégrale singulière; 2° par caractéristiques. Montrer comment on peut déduire l'intégrale singulière soit d'une intégrale complète, soit de l'équation différentielle.

Application.

1° Étant donnée l'équation

$$m^3pq + 2xyz - xy(px + qy) = 0,$$

dans laquelle m désigne une ligne donnée, trouver une intégrale complète;

2° Déduire de cette intégrale complète la surface intégrale S qui passe par la droite D dont les équations sont

$$y = 0, \qquad x = z.$$

Déterminer directement, en intégrant leurs équations différentielles, les caractéristiques dont le lieu est la surface S;

3° Étudier cette surface dans le voisinage de l'origine; déterminer sa forme générale à l'aide des sections faites par des plans passant par l'axe des y.

4° Trouver les lignes suivant lesquelles la surface S touche la surface représentée par l'intégrale singulière.

Composition de Mécanique rationnelle.

Un trièdre trirectangle OXYZ tourne avec une vitesse constante ω autour de son arête OZ, qui est dirigée en sens contraire de la pesanteur; il entraîne avec lui un paraboloïde P qui, rapporté aux axes OX, OY, OZ, aurait pour équation

$$x^2 - y^2 = 2pz.$$

Un point M de masse 1, de poids g, assujetti à se mouvoir sur la surface de P, est attiré vers le sommet O du paraboloïde par une force égale à $\frac{2g}{p}$ MO; en outre, MA, MB étant les perpendiculaires abaissées de M sur les génératrices rectilignes de P qui passent au sommet O, le point M est encore sollicité par deux forces dirigées suivant les *segments* AM, BM, et égales, la première à $\frac{3g}{p}$ AM, la seconde à $\frac{3g}{p}$ BM.

La position du mobile M sera définie par les valeurs des paramètres λ, μ, qui figurent dans les équations

$$\frac{x^2}{\lambda - p} + \frac{y^2}{\lambda + p} = \lambda - 2z, \qquad \frac{x^2}{\mu + p} + \frac{y^2}{\mu - p} = \mu + 2z$$

des paraboloïdes homofocaux à P et passant par le point M.

Cela posé, on demande :

1° De former l'équation aux dérivées partielles dont, suivant le théorème de Jacobi, il suffirait de connaître une intégrale complète pour en déduire, par de simples différentiations, les équations du mouvement du point M;

2° De trouver cette intégrale complète et les équations du mouvement quand on suppose $\omega = 0$;

3° D'intégrer l'équation de la trajectoire et d'indiquer la forme de cette ligne quand, ω étant toujours nul, on a, à l'instant initial,

$$x = y = p\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3 + 3\sqrt{3}}{8}\sqrt{pg},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{9 + \sqrt{3}}{8}\sqrt{pg}.$$