

WORONTZOFF

Sur les fonctions symétriques

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10
(1891), p. 325-329

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__325_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES FONCTIONS SYMETRIQUES;

PAR M. WORONTZOFF.

Soit

$$U = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi(a_0, a_1, \dots, a_n)$$

une fonction symétrique rationnelle et entière des racines de l'équation

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

On sait que

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{du}{dx_k} = - \sum_{r=1}^{r=n} (n-r+1) a_{r-1} \frac{du}{da_r}.$$

Nous nous proposons ici de généraliser ce théorème.
Comme

$$\frac{dx_k}{da_r} = - \frac{x_k^n}{f'(x_k)},$$

où

$$\begin{aligned} f'(x_k) &= a_0(x_k - x_1)(x_k - x_2) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n) \\ &= na_0 x_k^{n-1} + (n-1)a_1 x_k^{n-2} + \dots + a_{n-2} x_k + a_{n-1} \\ &= \left(\frac{-1}{x_k} \right) (a_1 x_k^{n-1} + 2a_2 x_k^{n-2} + \dots + (n-1)a_{n-1} x_k + na_n, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

on a

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Lambda_0 \frac{du}{da_0} + \Lambda_1 \frac{du}{da_1} + \dots + \Lambda_r \frac{du}{da_r} + \dots + \Lambda_n \frac{du}{da_n} \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} - \frac{1}{f'(x_k)} (\Lambda_0 x_k^n + \Lambda_1 x_k^{n-1} + \dots + \Lambda_r x_k^{n-r} + \dots + \Lambda_n) \frac{du}{dx_k} \end{aligned} \right. (1).$$

Posons, pour abrégér,

$$\begin{aligned} x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m &= S_m, \\ -(n-r-m+1)a_{r+m-1} + \sum_{c=1}^{c=m} a_{r+m-c} S_{c-1} \\ &= - \sum_{c=1}^{c=r} a_{r-c} S_{m+c-1} = \sum_{k=1}^{k=n} x_k^m \frac{da_r}{dx_k} = H_{(r)}^{(m)}, \end{aligned}$$

(1) Soit, par exemple, $U = S_q$, alors de la formule (1) on déduit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a_k x_k^{n+q-1}}{f'(x_k)} &= \sum_{q_1, q_2, \dots, q_n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} = - \frac{a_n}{q} \frac{ds_q}{da_n} \left(= \dots = - \frac{a_n}{q+r} \frac{ds_{q+r}}{da_r} \right) \\ &= \sum (-1)^i i! \frac{a_0^{-i} a_1^2 a_2^2 \dots a_n^i}{x! \beta! \dots \lambda!} \end{aligned}$$

(*Nouvelles Annales*, p. 382; 1888), où la somme $\sum_q x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}$ se rapporte à toutes les solutions entières positives de l'équation

$$q_1 + \dots + q_n = q.$$

d'où

$$\begin{aligned}
H_0^{(m)} = 0, \quad H_r^{(0)} = -(n-r+1)a_{r-1}, \quad H_r^{(1)} = ra_r, \\
H_r^{(2)} = (r+1)a_{r+1} - \frac{a_r a_1}{a_0}, \quad \dots
\end{aligned}$$

Maintenant, en prenant successivement dans l'égalité (1),

$$\begin{aligned}
A_0 = a_0, \quad A_1 = a, \quad \dots, \quad A_r = a_r, \quad \dots, \quad A_n = a_n, \\
A_0 = 0, \quad A_1 = -na_0, \quad \dots, \\
A_r = -(n-r+1)a_{r-1}, \quad \dots, \quad \dots, \quad A_n = -a_{n-1}, \\
\Lambda_0 = 0, \quad \Lambda_1 = a_1, \quad \Lambda_r = ra_r, \quad \dots, \quad \Lambda_n = na_n,
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
A_0 = -na_0, \quad A_1 = -(n-1)a_1, \quad \dots, \\
A_r = -(n-r)a_r, \quad \dots, \quad A_n = 0, \\
\Lambda_0 = 0, \quad \Lambda_1 = 2a_2 - \frac{a_1^2}{a_0}, \quad \dots, \\
\Lambda_r = (r-1)a_{r+1} - \frac{a_r a_1}{a_0}, \quad \dots,
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
A_0 = a_1, \quad A_1 = 2a_2, \quad \dots, \quad A_r = (r+1)a_{r+1}, \quad \dots, \\
\Lambda_0 = 0, \quad \Lambda_1 = H_1^{(m)}, \quad \dots, \quad \Lambda_r = H_r^{(m)}, \quad \dots,
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
A_0 = -a_0 L_{m-1}, \quad A_1 = H_1^{(m)} - a_1 S_{m-1}, \quad \dots, \\
A_r = H_r^{(m)} - a_r S_{m-1}, \quad \dots,
\end{aligned}$$

et en remarquant que

$$\begin{aligned}
H_1^{(m)} x_k^{n-1} + H_2^{(m)} x_k^{n-2} + \dots + H_{n-1}^{(m)} x_k + H_n^{(m)} \\
= a_1 x_k^{n+m-2} + 2a_2 x_k^{n+m-3} + \dots + na_n x_k^{n-1},
\end{aligned}$$

on trouve respectivement les formules suivantes

$$a_0 \frac{du}{da_0} + a_1 \frac{du}{da_1} + \dots + a_{n-1} \frac{du}{da_{n-1}} + a_n \frac{du}{da_n} = 0,$$

et

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{du}{dx_k} = - \left[na_0 \frac{du}{da_1} + (n-1)a_1 \frac{du}{da_2} + \dots \right. \\ \left. + 2a_{n-2} \frac{du}{da_{n-1}} + a_{n-1} \frac{du}{da_n} \right],$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} x_k \frac{du}{dx_k} = a_1 \frac{du}{da_1} + 2a_2 \frac{du}{da_2} + \dots \\ + (n-1)a_{n-1} \frac{du}{da_{n-1}} + na_n \frac{du}{da_n} \\ = - \left[na_0 \frac{du}{da_0} + (n-1)a_1 \frac{du}{da_1} + \dots \right. \\ \left. + 2a_{n-2} \frac{du}{da_{n-2}} + a_{n-1} \frac{du}{da_{n-1}} \right],$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} x_k^2 \frac{du}{dx_k} = \left(2a_2 - \frac{a_1^2}{a_0} \right) \frac{du}{da_1} + \left(3a_3 - \frac{a_2 a_1}{a_0} \right) \frac{du}{da_2} + \dots \\ + \left(na_n - \frac{a_{n-1} a_1}{a_0} \right) \frac{du}{da_{n-1}} + \left(- \frac{a_n a_1}{a_0} \right) \frac{du}{da_n} \\ = a_1 \frac{du}{da_0} + 2a_2 \frac{du}{da_1} + \dots \\ + (n-1)a_{n-1} \frac{du}{da_{n-2}} + na_n \frac{du}{da_{n-1}}, \\ \dots \dots \dots$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} x_k^m \frac{du}{dx_k} = \sum_{k=1}^{k=n} x_k^m \left(\frac{du}{da_1} \frac{da_1}{dx_k} + \frac{du}{da_2} \frac{da_2}{dx_k} + \dots + \frac{du}{da_n} \frac{da_n}{dx_k} \right) \\ = \sum_{r=1}^{r=n} H_r^{(m)} \frac{du}{da_r} = \sum_{r=0}^{r=n-1} (H_r^{(m)} - a_r S_{m-1}) \frac{du}{da_r}.$$

Exemples. — 1° Si l'on pose $U = S_i, i > 0$, on a

$$a_1 \frac{ds_i}{da_0} + 2a_2 \frac{ds_i}{da_1} + \dots \\ + (n-1)a_{n-1} \frac{ds_i}{da_{n-2}} + na_n \frac{ds_i}{da_{n-1}} = iS_{i+1};$$

(329)

2° Soit $u = \frac{\alpha_q}{\alpha_0}$, on obtient, pour $m > 1$,

$$\frac{1}{\alpha_0} \sum_{r=1}^{r=n} \mathbb{H}_r^{(m)} \frac{d\alpha_q}{d\alpha_r} + \frac{\mathbb{H}_q^{(m)}}{\alpha_0} = (-1)^q \sum x_1^m x_2 x_3 \dots x_q,$$

$$\mathbb{H}_q^{(m)} = (-1)^q \alpha_0 \sum x_1^m x_2 \dots x_q.$$