NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MARCHAND

Remarques sur le problème de mathématiques spéciales de l'agrégation de 1889

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 322-325

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__322_1>

REMARQUES SUR LE PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES DE L'AGRÉGATION DE 1889;

PAR M. MARCHAND.

Si l'on transforme l'énoncé par le principe de dualité, à trois surfaces inscrites dans un cône C correspondront trois surfaces passant par la même courbe plane. Si cette courbe plane devient le cercle imaginaire de l'infini, l'énoncé est remplacé par le suivant :

On donne deux sphères A, A'; on considère une sphère variable S touchant les deux sphères données en des points pour lesquels α et α' sont les plans tangents.

1° La droite $\alpha\alpha'$ d'intersection des plans tangents est située dans un plan fixe, que l'on sait être le plan radical de A et A';

2° La droite qui joint les points de contact des plans tangents α et α' passe par l'un des centres de similitude;

3° Démontrer que l'enveloppe du plan polaire d'un point fixe P par rapport à la sphère S se compose de deux quadriques bitangentes;

4° Trouver le lieu de la droite d'intersection des plans tangents communs à ces deux quadriques bitangentes lorsque le point P décrit une droite isotrope.

La quatrième Partie ne pouvant avoir lieu pour des éléments réels parait peu intéressante dans le cas de la sphère. Restent les trois premières parties dont les deux premières expriment des théorèmes bien connus.

La solution du problème du concours général nous apprend que l'enveloppe du plan polaire d'un point fixe par rapport à toutes les sphères tangentes à deux sphères fixes se compose de deux quadriques bitangentes.

Laissant de côté la démonstration analytique de cette proposition, je me bornerai à signaler quelques-unes de ses conséquences géométriques. Il est évident d'abord que les sphères tangentes à deux sphères fixes A et A' se divisent en deux groupes : le premier groupe s'obtient en considérant les rayons des sphères comme de même signe; le second en considérant les rayons des sphères comme de signes contraires, la théorie des cycles s'étendant évidemment aux sphères aussi bien qu'aux cercles. Je ne considérerai que l'un de ces groupes dans tout ce qui suit.

Si P est le point fixe, pour que son plan polaire le contienne, il faut que la sphère S, par rapport à laquelle on prend le plan polaire, passe par P. Comme S est tangente déja à A et A′ et que P peut être assimilé à une sphère de rayon nul, la sphère S engendrera une cyclide de Dupin ayant le point P comme point double. Le cône lieu des tangentes en P à la cyclide étant de révolution, on voit que le cône enveloppe des plans du lieu passant par P est du second degré et de révolution; la première partie de la proposition s'accorde bien avec ce qui a été dit que l'enveloppe était une quadrique; la seconde montre que P est une des focales de la quadrique.

Je cherche le cylindre circonscrit à l'enveloppe parallèlement à une direction D, c'est-à-dire les plans polaires qui soient parallèles à D; ils correspondent évidemment aux sphères ayant leurs centres dans un plan Q mené par P perpendiculairement à D.

Les sphères tangentes à A et A′ et ayant leurs centres dans le plan Q ont leurs centres situés sur une conique admettant A et A′ comme foyers dans l'espace. Ces sphères enveloppent une cyclide de Dupin, et, comme le cylindre parallèle à D doit être du second degré, on est conduit à ce théorème :

« On considère toutes les sphères S appartenant à l'un des modes de génération d'une cyclide de Dupin et un point P dans le plan des centres des sphères S. L'enveloppe des plans polaires du point P par rapport aux sphères S est un cylindre du second degré. »

Le tore n'étant qu'un cas particulier de la cyclide, le même théorème lui est applicable.

Si l'on applique la transformation par rayons vecteurs réciproques de manière à obtenir toujours une cyclide de Dupin, on généralisera facilement cette dernière proposition. En effet, à une sphère et aux plans tangents menés par un point P, on fera correspondre une sphère et les sphères tangentes passant par le pôle d'inversion et par le point transformé de P. Comme un cercle se transforme en un cercle, les points de contact d'une sphère avec toutes les sphères passant par deux points fixes seront dans un même plan, lequel se substituera, dans l'énoncé, au plan polaire.

On obtiendra donc sans aucune difficulté un nouvel énoncé dans lequel interviendront des sphères passant par deux points fixes situés tous deux dans le plan des centres des sphères S qui constituent un des modes de génération de la cyclide de Dupin.