Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 312-317

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__312_1>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Gomez Teixeira à M. Rouché.

Dans une Note *Sur la formule de Stirling*, qui a été insérée dans les *Comptes rendus*, t. CX, p. 513; 1890, vous démontrez d'une manière bien simple la formule

$$(2)\qquad \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = e^{\frac{\theta p}{12(n+p)n}},$$

où θ représente un nombre compris entre 0 et 1, et où l'on a

$$(1)\qquad \varphi(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Ensuite, au moyen de cette formule, vous trouvez la formule de Stirling, qui donne le produit $\Gamma(n+1)$, quand n est un nombre très grand. Vous supposez, dans votre analyse, que n est un nombre positif *entier*.

En étudiant votre démonstration, je viens de remarquer qu'on peut la modifier de manière à considérer le cas où n représente un nombre quelconque, rationnel ou irrationnel. Je remarque premièrement que votre démonstration de la formule (2) a lieu quand n est fractionnaire, ainsi que la démonstration, basée sur la formule de Wallis, que vous donnez de l'égalité

$$\lim_{p=\infty} \varphi(p) = \sqrt{2\pi}.$$

Ensuite je modifie l'analyse que vous employez pour déduire de (2) la formule de Stirling de la manière suivante.

Je trouve premièrement au moyen de la formule (1)

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n+p)}{\varphi(p)} = \lim_{p=\infty} \frac{\Gamma(n+p+1)e^{-p}p^{p+\frac{1}{2}}}{\Gamma(p+1)e^{-(n+p)}(n+p)^{n+p+\frac{1}{2}}},$$

et ayant égard aux égalités

$$\Gamma(n+p+1) = n(n+1)\ldots(n+p)\Gamma(n),$$
$$\Gamma(p+1) = 1.2.3\ldots p,$$

j'écris cette formule d'abord de la manière suivante

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n+p)}{\varphi(n)} = \lim_{n=\infty} \frac{n(n+1)\ldots(n+p)\Gamma(n)e^{-p}p^{p+\frac{1}{2}}}{p!\, e^{-(n+p)}(n+p)^{n+p+\frac{1}{2}}},$$

et ensuite, ayant égard à la définition de Gauss de la fonction $\Gamma(n)$,

$$\Gamma(n) = \lim_{p=\infty} \frac{p!\, p^n}{n(n+1)\ldots(n+p)},$$

je l'écris de la manière suivante

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n+p)}{\varphi(p)} \lim_{p=\infty} \frac{p^{n+p+\frac{1}{2}}}{e^{-n}(n+p)^{+p+\frac{1}{2}}}.$$

Mais nous avons

$$\lim_{p=\infty} \left(\frac{n}{p} + 1\right)^{n+p+\frac{1}{2}} = e^n.$$

Donc on aura

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n+p)}{\varphi(p)} = 1,$$

et, par conséquent,

$$\lim_{p=\infty} \varphi(n+p) = \lim_{p=\infty} \varphi(p) = \sqrt{2\pi}.$$

Si l'on remarque maintenant que la formule (2) donne

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = e^{\frac{\theta}{12n}} \qquad (0 < \theta < 1),$$

et par conséquent

$$\varphi(n) = e^{\frac{\theta}{12n}} \lim_{p=\infty} \varphi(n+p),$$

on trouve

$$\varphi(n) = e^{\frac{\theta}{12n}} \sqrt{2\pi},$$

et l'égalité (1) donne ensuite la formule de Stirling

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

Pour plus de clarté, je crois devoir reproduire ici la démonstration que j'ai donnée dans les *Comptes rendus* et à laquelle se rapporte la lettre de M. Texeira.

La relation bien connue

$$\log(n+1) - \log n = \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{\theta}{12n(n+1)}\right],$$

où n désigne un nombre entier positif quelconque, et θ un nombre compris entre o et 1, peut s'écrire

$$\frac{\theta}{12n(n+1)} = -1 + (n+\tfrac{1}{2})[\log(n+1) - \log n].$$

Elle devient

$$\frac{\theta}{12n(n+1)} = \log\varphi(n) - \log\varphi(n+1),$$

quand on pose

$$\varphi(n) = \frac{1.2.3\ldots n}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}. \tag{1}$$

On conclut de là

$$\log\varphi(n) > \log\varphi(n+1)$$

et

$$\log\varphi(n) - \frac{1}{12n} < \log\varphi(n+1) - \frac{1}{12(n+1)};$$

en d'autres termes, des deux fonctions

$$\varphi(n), \quad \varphi(n)e^{-\frac{1}{12n}},$$

la première est décroissante et la seconde croissante, lorsque l'entier n croît. Si donc on désigne par p un nombre entier positif quelconque, on a les inégalités

$$\varphi(n) > \varphi(n+p),$$
$$\varphi(n)e^{-\frac{1}{12n}} < \varphi(n+p)e^{-\frac{1}{12(n+p)}},$$

que l'on peut remplacer par l'égalité

$$(2) \qquad \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = e^{\frac{\theta p}{12n(n+p)}},$$

dans laquelle θ désigne un nombre compris entre 0 et 1.

Il est bien aisé de déduire de cette relation la formule célèbre de Stirling pour l'évaluation approchée du produit $1.2.3\ldots n$ lorque n est un grand nombre.

En effet, la relation (2), appliquée au cas où n est égal à p, montre immédiatement que le rapport

$$\frac{\varphi(p)}{\varphi(2p)}$$

a pour limite l'unité, lorsque p croît indéfiniment. On a donc, pour $p = \infty$,

$$\lim \varphi(p) = \lim \frac{\varphi(p)^2}{\varphi(2p)}$$

ou, d'après (1),

$$\lim \varphi(p) = \lim \sqrt{4 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2p-2}{2p-1} \cdot \frac{2p}{2p-1}},$$

et enfin, en vertu du théorème de Wallis,

$$\lim \varphi(p) = \sqrt{2\pi}.$$

Dès lors, si dans la formule (2) on laisse n fixe en faisant croître p indéfiniment, on obtient

$$\frac{\varphi(n)}{\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{\theta}{12n}},$$

c'est-à-dire, d'après la définition de $\varphi(n)$,

$$1.2.3\ldots n = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

C'est la formule de Stirling, qui donne deux limites

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}, \qquad \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} . e^{\frac{1}{12n}},$$

entre lesquelles est compris le produit $1.2.3\ldots n$. (E. R.)