NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-S. COLLIN

Tangentes communes à deux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 302-305

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__302_0>

TANGENTES COMMUNES A DEUX CONIQUES ;

PAR M. J.-S. COLLIN,
Ancien élève de l'École Polytechnique,
Professeur à l'École Albert-le-Grand (Arcueil).

La recherche des tangentes communes à deux coniques se fait habituellement par l'emploi des coordonnées tangentielles (SALMON, *Géométrie analytique*, traduction Resal, p. 485, et PICQUET, *Géométrie analytique*, p. 458 et 509); nous allons l'exposer d'une manière plus élémentaire en faisant intervenir uniquement l'équation aux coefficients angulaires des tangentes.

Soient donc les deux coniques

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
$$f_1(x, y) = A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0,$$

et désignons par φ et φ_1 les parties homogènes du second degré de f et f_1, et par $f'_x, f'_{1.x}, \ldots$, les *demi*-dérivées.

PROBLÈME I. — *Trouver l'équation des tangentes communes aux deux coniques* $f = 0$ et $f_1 = 0$.

Cela revient *évidemment* à trouver le lieu des points par chacun desquels on peut mener aux deux coniques une tangente commune, c'est-à-dire deux tangentes parallèles. Or, si (α, β) est un point de ce lieu, les faisceaux de tangentes issues de ce point aux deux coniques seront respectivement

$$f(\alpha, \beta) f(x, y) - (xf'_\alpha + yf'_\beta + f'_\gamma)^2 = 0,$$
$$f_1(\alpha, \beta) f_1(x, y) - (xf'_{1\alpha} + yf'_{1\beta} + f'_{1\gamma})^2 = 0.$$

où $\gamma = 1$; et par suite les équations aux coefficients angulaires m de ces tangentes seront elles-mêmes

$$f(\alpha, \beta)\varphi(1, m) - (f'_\alpha + m f'_\beta)^2 = 0,$$
$$f_1(\alpha, \beta)\varphi_1(1, m) - (f'_{1\alpha} + m f'_{1\beta})^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &m^2[C f(\alpha, \beta) - f'^2_\beta] \\ &\quad + 2m[B f(\alpha, \beta) - f'_\alpha f'_\beta] + A f(\alpha, \beta) - f'^2_\alpha = 0, \\ &m^2[C_1 f_1(\alpha, \beta) f'^2_{1\beta}] \\ &\quad + 2m[B_1 f(\alpha, \beta) - f'_{1\alpha} f'_{1\beta}] - A_1 f_1(\alpha_1, \beta) - f'^2_{1\alpha} = 0, \end{aligned}$$

ou, par abréviation,

$$\mathcal{A} m^2 + 2\mathcal{B} m + \mathcal{C} = 0,$$
$$\mathcal{A}_1 m^2 + 2\mathcal{B}_1 m - \mathcal{C}_1 = 0.$$

Mais, si le point (α, β) est un point du lieu, ces deux équations doivent avoir une racine commune, ce qui impose

$$(\mathcal{A}\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}\mathcal{A}_1)^2 - 4(\mathcal{A}\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}\mathcal{A})(\mathcal{B}\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}\mathcal{B}_1) = 0,$$

ou bien, ce qui revient identiquement au même,

$$(\mathcal{A}\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}\mathcal{A}_1 - 2\mathcal{B}\mathcal{B}_1)^2 - 4(\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C})(\mathcal{B}_1^2 - \mathcal{A}_1\mathcal{C}_1) = 0.$$

Telle est donc l'équation du lieu des points (α, β), c'est-à-dire l'équation des tangentes communes, à condition d'y remplacer α, β par les coordonnées courantes x, y.

Remarque I. — Si l'on désigne comme d'ordinaire par $A'_1, \ldots, F'_1\, A'_1, \ldots, F'_1$ les coefficients de $A, \ldots, F, A, \ldots, F_1$ dans les développements respectifs des discriminants Δ et Δ_1 de f et f_1, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= F'x^2 - 2D'x + A, \\ \mathcal{B} &= -F'xy + E'x + D'y - B', \\ \mathcal{C} &= F'y^2 - 2Ey + C; \\ \mathcal{A}_1 &= F'_1 x^2 - 2D'_1 x + A'_1, \\ \mathcal{B}_1 &= -F'_1 xy + E'_1 x + D'_1 y - B'_1, \\ \mathcal{C}_1 &= F'_1 y^2 - 2E'_1 y + C'_1, \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{A}\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}\mathcal{A}_1 - 2\mathcal{B}\mathcal{B}_1 = x^2(F'C_1 + C'F'_1 - 2E'E'_1) + \ldots;$$

et ainsi cette expression, en apparence du quatrième degré, n'est en réalité que du second. Cette même expression est d'ailleurs le premier membre de l'équation que l'on trouverait immédiatement en cherchant le lieu des points par où l'on peut mener à l'ensemble des deux coniques f et f_1 des tangentes formant un faisceau harmonique : avec Salmon nous la représenterons par F.

Remarque II. — On a, d'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C} &= (Bf - f'_x f'_y)^2 - (Cf - f'^2_y)(Af - f'^2_x) \\
&= (B^2 - AC)f^2 \\
&\quad + f(Af'^2_y + Cf'^2_x - 2Bf'_x f'_y) \\
&= (B^2 - AC)f^2 + f \\
&\qquad \times [(AC - B^2)(f - F) + AE^2 + CD^2 - 2BDE] \\
&= -f\Delta,
\end{aligned}$$

et de même par analogie on aurait

$$\mathcal{B}_1^2 - \mathcal{A}_1\mathcal{C}_1 = -f_1\Delta_1.$$

Conclusion. — L'équation aux tangentes communes peut donc s'écrire également sous la forme connue

$$F^2 = 4\Delta\Delta_1 ff_1,$$

qui n'est que du quatrième degré, et l'on voit ainsi que :

1° Deux coniques ne peuvent avoir plus de quatre tangentes;

2° Les huit points de contact de deux coniques et de leurs tangentes communes sont tous sur la conique $F = 0$.

Remarque. — Le principe de cette solution pourrait être employé pour la recherche de l'équation aux asymptotes et aux sécantes communes à deux coniques, et peut aussi bien servir pour deux courbes quelconques.

Problème II. — *Déterminer les points d'intersection des tangentes communes.*

Ces points ne sont autres que ceux d'où l'on peut mener aux coniques deux tangentes communes; donc pour ces points l'on a généralement

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_1} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}_1} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}_1},$$

et par suite ces points sont les points communs aux trois courbes

$$\mathcal{A}\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}\mathcal{A}_1 = 0, \qquad \mathcal{B}\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}\mathcal{B}_1 = 0, \qquad \mathcal{A}\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}\mathcal{A}_1 = 0.$$

Ainsi qu'on le voit presque immédiatement, ces courbes sont des cubiques, et l'on vérifierait aisément qu'elles n'ont que six points communs à distance finie, ce que l'on pouvait prévoir, car les quatre tangentes communes ne peuvent se rencontrer en plus de six points.