MAXIMILIEN MARIE

Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 276-296

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__276_1>

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

CONFÉRENCES DONNÉES PAR M. MAXIMILIEN MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève
et à l'École Monge (¹).

26. *Détermination de la courbe la plus générale du troisième degré quarrable algébriquement.* — Les trois asymptotes de cette courbe doivent la couper chacune en trois points situés à l'infini, par conséquent elle doit avoir trois diamètres rectilignes, respectivement conjugués des cordes parallèles à ses trois asymptotes; ces diamètres seront, d'ailleurs, les médianes du triangle des asymptotes; la courbe doit, en outre, avoir un point double, lequel ne pourra se trouver qu'au point de rencontre des trois diamètres.

Son équation, rapportée à l'une des médianes, prise pour axe des x, au point double, pris pour origine, et à la parallèle à l'asymptote parallèle aux cordes conjuguées de l'axe des x, prise pour axe des y, est

$$y = \frac{ax}{3m}\sqrt{\frac{x+3m}{x-m}},$$

a désignant la moitié du côté du triangle des asymptotes qui est parallèle à l'axe des y, et m le tiers de la médiane correspondant à ce côté pris pour base.

(¹) *Voir* t. X, p. 172.

La quadratrice est

$$\frac{a}{6m}(x + 3m)\sqrt{(x - m)(x + 3m)}.$$

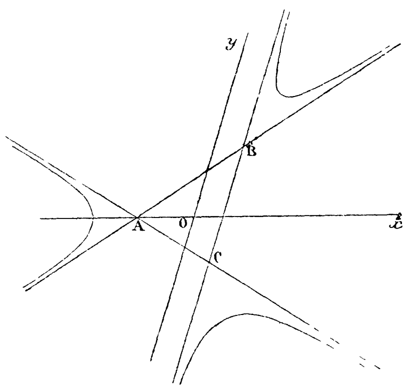
La courbe représentée par l'équation

$$y = \frac{ax}{3m}\sqrt{\frac{x - 3m}{x - m}}$$

a la figure ci-jointe.

Je lui ai donné le nom de *trèfle*, à cause de sa forme : toutes ses conjuguées, qui sont du sixième degré, sauf

Fig. 2.



le folium de Descartes, sont également quarrables algébriquement. On savait depuis longtemps que le folium était quarrable algébriquement, mais on n'avait pas l'explication du fait. On vérifiera aisément que les trois asymptotes de cette courbe la coupent aussi chacune en trois points situés à l'infini; seulement deux d'entre elles sont imaginaires.

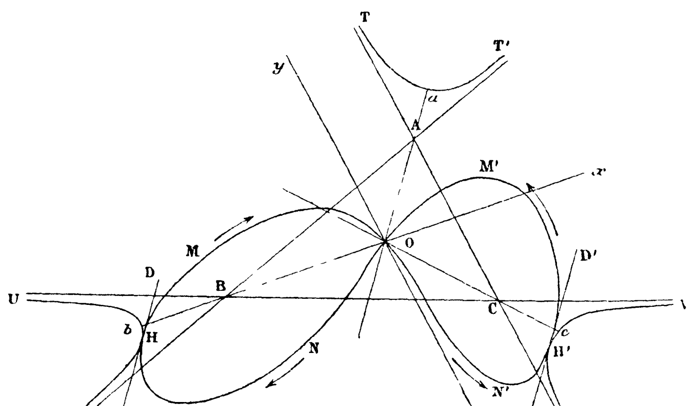
Cet exemple est très propre à faire toucher du doigt bien des choses que j'ai énoncées comme évidentes, parce qu'elles le sont en effet, mais qui paraissent avoir été peu comprises.

La démonstration, entre autres, de ce théorème que la formation d'un nouveau point double dans une courbe algébrique entraîne une réduction de deux unités dans le nombre des périodes de la quadratrice, cette démonstration d'un fait, pourtant si imprévu, n'a excité aucun intérêt, parce que l'analyse pure ne peut pas fournir, par elle-même, une notion exacte de la continuité et que les analystes cultivent généralement très peu la Géométrie.

Il est facile de montrer combien étaient mal fondées les préventions avec lesquelles ma démonstration a été reçue.

Menons au trèfle TaT′UbU′VcV′ deux tangentes

Fig. 23.



parallèles DE, D′E′, dont la direction soit celle d'une droite comprise dans l'intérieur de l'angle A, par exemple, du triangle BAC des asymptotes; une parallèle à ces deux tangentes et comprise entre elles ne coupera la courbe qu'en un seul point réel; les deux tangentes DE, D′E′ comprendront donc entre elles une conjuguée du trèfle; cette conjuguée sera fermée de toutes parts, ce qui était prévu, les trois asymptotes de la courbe réelle étant réelles. Soit C la caractéristique de cette conjuguée ou le coefficient angulaire commun de DE, D′E′; la conjuguée C passera au point double O; les éléments du lieu en ce point O seront fournis par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{a}{3m}\sqrt{3}\sqrt{-1};$$

les coefficients angulaires des tangentes à la conjuguée C, au point O, seront donc, d'après une formule connue,

$$\pm \frac{a}{m\sqrt{3}} \mp \frac{\frac{2a^2}{3m^2}}{\pm \frac{a}{m\sqrt{3}} - C}.$$

En conséquence, les branches de la conjuguée considérée se couperont au point O sous un angle et elles formeront une boucle en forme de huit; cette conjuguée aura une forme telle que celle qu'indique la figure; si l'Algèbre entendait la continuité autrement que moi, si elle la comprenait, par exemple, comme l'ont comprise MM. Cauchy et Puiseux, dans leur théorie de la série de Taylor; ou si l'Algèbre considérait le chemin ONHMO comme fermé, sous le prétexte que le point mobile $[x, y]$, parti de O, serait revenu en O, c'est-à-dire que la fonction y et sa variable x seraient en même temps revenues à leurs valeurs initiales, mais sans que les dérivées initiales et finales de tous les ordres, de la fonction y, fussent les mêmes au départ et à l'arrivée, l'intégrale

$$\int \frac{ax}{3m}\sqrt{\frac{x+3m}{x-m}}$$

admettrait pour période le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire de la boucle HMONH; elle admettrait de même pour période le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire de la boucle OM'H'N'O; mais, cette intégrale étant algébrique n'a pas de périodes; donc l'Algèbre entend la continuité comme je l'ai entendue partout dans la théorie de la série de Taylor, comme dans la théorie des intégrales.

Maintenant, pourquoi la quadratrice du trèfle est-elle algébrique, quoique ses conjuguées soient toutes fermées, sauf celles dont les cordes réelles sont parallèles aux trois directions asymptotiques et qui sont des foliums? C'est parce que les deux boucles de l'une quelconque d'entre elles, même des trois qui sont des foliums, entourent des aires égales, comme on le vérifierait aisément, puisqu'on a la formule de quadrature et que c'est le produit par $\sqrt{-1}$ de la différence de leurs aires qui forme la période; parce que la continuité exige que les deux boucles soient parcourues dans le sens indiqué par les flèches, ou dans le sens contraire.

Quant à la raison pour laquelle les deux aires ONHMO et ON'H'M'O sont égales, dans le cas actuel, elle est facile à donner : si l'on déformait infiniment peu la courbe, de manière, d'une part, à supprimer le point double, qui serait alors remplacé par un petit anneau réel, et, de l'autre, à faire en sorte que les trois asymptotes cessassent d'être d'inflexion, en premier lieu, la conjuguée ONHMON'H'M'O se segmenterait en deux anneaux séparés, compris, l'un entre la branche UU' et l'anneau réel, qui aurait remplacé le point double, l'autre compris entre ce même anneau réel et la branche VV'; en second lieu, les aires enveloppées par les deux anneaux de la conjuguée cesseraient d'être égales; mais, en troisième lieu, la quadratrice de la courbe ne comportant que deux périodes elliptiques, la différence des deux aires en question, lorsqu'elle réexisterait, ne pourrait être que l'aire correspondant à l'une des trois périodes cycliques.

La réapparition du point double, non accompagnée de l'annulation des trois périodes cycliques, aurait alors pour effets, d'abord, de réduire à néant la période elliptique réelle; en second lieu, de réduire à une seule apparence les deux figures de la période ultracyclique imaginaire; en troisième lieu, de supprimer, par soustraction, la partie commune, elliptique, des deux représentations de la période ultracyclique imaginaire; enfin de ne laisser subsister, à la place des deux figures de la période ultracyclique imaginaire, qu'une forme accessoire de l'une des périodes cycliques.

Sur la rectification des courbes planes.

Les intégrales rectificatrices de l'enveloppe réelle et de l'enveloppe imaginaire réalisée d'un même lieu ont les mêmes périodes, au facteur $\sqrt{-1}$ près.

La période réelle de la rectificatrice d'une hyperbole est la différence entre la longueur totale de cette hyperbole et la longueur totale de ses asymptotes (les extrémités ayant mêmes abscisses); la période imaginaire de la même rectificatrice est le produit par $\sqrt{-1}$ de la différence entre la longueur totale de l'hyperbole supplémentaire et la longueur totale des asymptotes communes.

Ces deux derniers théorèmes s'étendent aux courbes de tous les ordres, en y considérant les différents cycles fermés, composés de branches convenablement groupées des deux enveloppes et de leurs asymptotes communes.

Les démonstrations de ces théorèmes se trouvent dans le Tome II de ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires*; elles n'ont pas été données aux Conférences.

27. *Précis d'une théorie rationnelle des fonctions circulaires directes et inverses.* — Si l'on pose

$$S = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

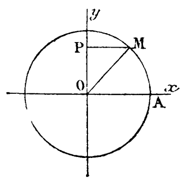
y sera par définition le sinus de S et S l'arc dont le sinus est y; $x = \sqrt{1-y^2}$ sera le cosinus de S et S l'arc dont le cosinus est $x = \sqrt{1-y^2}$; $\frac{y}{x}$ sera la tangente de S, $\frac{x}{y}$ en sera la cotangente, $\frac{1}{x}$ la sécante et $\frac{1}{y}$ la cosécante.

On aura évidemment

$$\sin^2 S + \cos^2 S = 1, \qquad \operatorname{tang} S = \frac{\sin S}{\cos S}, \qquad \ldots.$$

x et y étant les coordonnées d'un point quelconque du cercle $x^2 + y^2 = 1$ ou de l'une de ses conjuguées, il sera

Fig. 24.



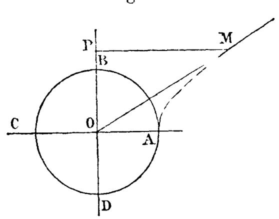
toujours facile, par la théorie des aires, de savoir ce que sera S, quand même x et y seraient imaginaires.

Supposons d'abord y réel et moindre que 1, x sera aussi réel et moindre que 1 ; le point $[x, y]$ appartiendra au cercle : soit M ce point,

$$\begin{aligned}
\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} &= \int_0^y \frac{(1-y^2+y^2)\,dy}{\sqrt{1-y^2}} \\
&= \int_0^y \frac{y^2\,dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_0^y dy\sqrt{1-y^2} \\
&= -\int \frac{-y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}\,y + \int_0^y dy\sqrt{1-y^2} \\
&= \left[-y\sqrt{1-y^2}\right]_0^y + 2\int_0^y dy\sqrt{1-y^2} \\
&= 2\text{ aire OAMP} - 2\text{ aire OPM} \\
&= 2\text{ aire secteur AOM} + 2k\pi = S.
\end{aligned}$$

Si y est imaginaire sans partie réelle, x sera réel et plus grand que 1, le point $[x, y]$ appartiendra à la conjuguée à abscisses réelles du cercle : soit M ce point, $2\int_0^y dy\sqrt{1-y^2}$ sera imaginaire sans partie réelle, et représentera le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire OAMP; d'un

Fig. 25.



autre côté, $-y\sqrt{1-y^2}$ représentera le double du produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire du triangle OMP; par conséquent $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ ou S représentera le double du produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire du secteur AOM, et l'on pourra y ajouter un nombre entier de fois 2π, parce que, avant de faire parcourir l'arc AM au point $[x, y]$, on pourra lui faire parcourir, autant de fois que l'on voudra, la circonférence ABCDA, dans un sens ou dans l'autre.

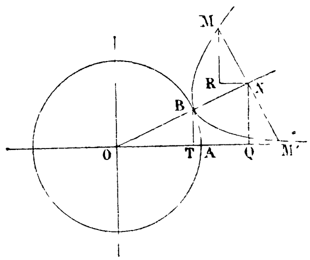


Fig. 26.

Si y et x ont respectivement pour valeurs $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ et $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, le point $[x, y]$ appartiendra à la conjuguée $C = \frac{\beta'}{\beta}$ du cercle : soit M ce point, α et α' seront les coordonnées du point N milieu de la corde réelle MNM' de la conjuguée, c'est-à-dire OQ et QN, β sera égal à $-$NR et β' à $+$RM, de sorte que x et y auront respectivement pour valeurs

$$x = \mathrm{OQ} - \mathrm{NR}\sqrt{-1},$$
$$y = \mathrm{QN} + \mathrm{RM}\sqrt{-1};$$

mais la figure donne les analogies

$$\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{BT}} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OB}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{RM}}{\mathrm{OT}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{OB}},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{QN} = \sin(2\,\mathrm{AOB})\cos(2\,\mathrm{BOM}\sqrt{-1})$$

et

$$\mathrm{RM}\sqrt{-1} = \cos(2\,\mathrm{AOB})\sin(2\,\mathrm{BOM}\sqrt{-1});$$

d'où

$$y = \sin(2\,\mathrm{AOB})\cos(2\,\mathrm{BOM}\sqrt{-1}) + \cos(2\,\mathrm{AOB})\sin(2\,\mathrm{BOM}\sqrt{-1});$$

d'un autre côté, si l'on cherchait la valeur de $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$,
on trouverait

$$S = 2(\text{AOB} + \text{BOM}\sqrt{-1}) + 2k\pi;$$

on en conclut

$$\begin{aligned} y = \sin S = &\ \sin(2\text{AOB} + 2\text{BOM}\sqrt{-1}) \\ = &\ \sin(2\text{AOB})\cos(2\text{BOM}\sqrt{-1}) \\ &+ \cos(2\text{AOB})\sin(2\text{BOM}\sqrt{-1}); \end{aligned}$$

on trouverait de même

$$\begin{aligned} x = \cos S = &\ \cos(2\text{AOB} + 2\text{BOM}\sqrt{-1}) \\ = &\ \cos(2\text{AOB})\cos(2\text{BOM}\sqrt{-1}) \\ &- \sin(2\text{AOB})\sin(2\text{BOM}\sqrt{-1}). \end{aligned}$$

La formule

$$S = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

donne

$$\frac{dS}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\cos S},$$

d'où

$$\frac{dy}{dS} = D(\sin S) = \cos S;$$

d'un autre côté,

$$\frac{dS}{dx} = \frac{dS}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos S}\,\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos S}\,\frac{-1}{\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}} = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{\sin S},$$

d'où

$$\frac{dx}{dS} = D(\cos S) = -\sin S.$$

Il en résulte par la formule de Maclaurin

$$\sin S = S - \frac{S^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\cos S = 1 - \frac{S^2}{1.2} + \ldots,$$

quel que soit S.

28. *Précis d'une théorie rationnelle des fonctions exponentielle et logarithmique.* — Si l'on pose

$$S = \int_1^x \frac{dx}{x},$$

S sera l'aire de l'hyperbole équilatère $y = \frac{1}{x}$, comptée du sommet A jusqu'à un point quelconque d'une conjuguée quelconque et s'appellera le *logarithme de x*.

Si $\varphi(x)$ désigne une fonction de x assujettie seulement à prendre la valeur 1 pour $x = 1$, on aura identiquement

$$\int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^x \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \int_1^x \frac{\varphi(x)dx + x\varphi'(x)dx}{x\varphi(x)} = \int_1^x \frac{d[x\varphi(x)]}{x\varphi(x)},$$

c'est-à-dire

$$L(x) + L[\varphi(x)] = L[x\varphi(x)],$$

$\varphi(x)$ pouvant prendre une valeur quelconque lorsque x n'est pas égal à 1. On en conclut

$$L(ab) = L(a) + L(b),$$

$$L\left(\frac{a}{b}\right) = L(a) - L(b),$$

$$L(a^m) = m\,La,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le demi-axe OA de l'hyperbole est $\sqrt{2}$; par conséquent, l'aire de la conjuguée circulaire est 2π et la période de l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$ est $2\pi\sqrt{-1}$, c'est-à-dire que

$$\int_1^x \frac{dx}{x} - \int_A^M \frac{dx}{x} = \text{aire } a\text{AM}m + 2k\pi\sqrt{-1}$$
$$= L(x) - 2k\pi\sqrt{-1}.$$

Si M' désigne le point de l'hyperbole diamétralement opposé à M,

$$\int_A^{M'} \frac{dx}{x} = \int_A^{M} \frac{dx}{x} + \int_M^{M'} \frac{dx}{x};$$

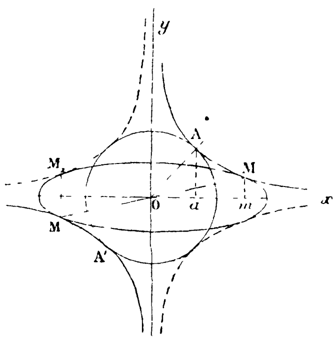
mais

$$\int_M^{M'} \frac{dx}{x} = -\pi\sqrt{-1},$$

par conséquent,

$$\int_1^{-x} \frac{dx}{x} = \mathrm{L}(x) + (2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Fig. 27.



Si M_1 désigne le point de l'hyperbole supplémentaire symétrique de M par rapport à l'axe des y,

$$\int_A^{M_1} \frac{dx}{x} = \int_A^{M} \frac{dx}{x} + \int_M^{M_1} \frac{dx}{x};$$

mais

$$\int_M^{M_1} \frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}:$$

en effet, lorsque le point mobile

$$(x = \alpha + \beta\sqrt{-1},\quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1})$$

parcourt la conjuguée C du lieu $xy = 1$, $\frac{\beta'}{\beta}$ conserve la valeur C; mais

$$\alpha' - \beta'\sqrt{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{-1}} = \frac{\alpha - \beta\sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2}$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{-1},$$

de sorte que

$$\beta' = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

et que, par conséquent,

$$\frac{\beta'}{\beta} = -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}$$

conserve une valeur constante C, ou que $\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta$ reste constamment nul. Il en résulte que

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{d\alpha + d\beta\sqrt{-1}}{\alpha - \beta\sqrt{-1}} = \int \frac{(\alpha - \beta\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})}{\alpha^2 + \beta^2}$$
$$= -C\int(\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta) - C\sqrt{-1}\int(\beta\,d\alpha + \alpha\,d\beta)$$

reste imaginaire sans partie réelle. Or la partie imaginaire de $\int_{M}^{M_1} \frac{dx}{x}$ est $-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, car, l'ordonnée y du point M_1 de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu étant imaginaire sans partie réelle, l'expression $\frac{y^2}{2C}$ de l'aire du triangle à introduire à la limite M_1, pour rapporter le lieu au même axe des x et à une parallèle aux cordes réelles de la conjuguée MM_1, serait réelle.

Il en résulte

$$\int_1^{x\sqrt{-1}} \frac{dx}{x} = L(x) \quad (2k - \tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1}$$

et, de la même manière,

$$\int_1^{x\sqrt{-1}} \frac{dx}{x} = L(x) - (2k + \tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1}.$$

Comme S croît en progression arithmétique, lorsque x croît en progression géométrique et que, d'ailleurs, $\frac{dS}{dx} = \frac{1}{x}$ part de la valeur 1, lorsque $x = 1$ et $S = 0$, il en résulte que les deux progressions sont, pour x,

$$1 : (1 + \alpha) : (1 + \alpha)^2 : \ldots : (1 + \alpha)^n : \ldots,$$

et pour S,

$$0 . \alpha . 2\alpha . \ldots . n\alpha . \ldots,$$

α pouvant être réel ou imaginaire.

Si l'on veut déterminer la base du système, il faut supposer α réel et prendre $n\alpha = 1$, d'où $n = \frac{1}{\alpha}$ et la base est

$$(1 + \alpha)^n = (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Les logarithmes dont il s'agit dans ce qui précède sont donc les logarithmes népériens; et, en conséquence, on peut poser

$$x = e^S,$$

pourvu qu'il soit entendu que les exposants S se comporteront, dans toutes les opérations, comme s'ils étaient réels.

L'équation

$$S = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

donne

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{x},$$

d'où

$$\frac{dx}{dS} = x = e^S;$$

toutes les dérivées de x par rapport à S se réduisent donc à e^S, et ont la valeur 1, pour $S = 0$; il en résulte, par la formule de Maclaurin,

$$e^{S} = 1 + \frac{S}{1} + \frac{S^2}{1.2} + \dots.$$

Remarque. — Il n'est pas étonnant que les fonctions circulaires, directes et inverses, se ramènent aux fonctions exponentielles et logarithmiques, puisque les unes ont leur origine dans la quadratrice du cercle et de ses conjuguées, qui sont des hyperboles équilatères, et les autres dans la quadratrice de l'hyperbole équilatère et de ses conjuguées, dont l'une est un cercle.

SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Le second Volume de ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires* contient la théorie élémentaire des fonctions elliptiques, établie d'après les mêmes principes que les deux précédentes.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

Le temps n'a permis de traiter que bien imparfaitement les questions, analogues aux précédentes, que comporte la Géométrie à trois dimensions.

Nous ne ferons guère non plus, ici, qu'indiquer les solutions.

On trouvera les explications complémentaires qui seraient jugées utiles dans les deux premiers Volumes de la *Théorie des fonctions de variables imaginaires*; mais le lecteur pourrait toujours y suppléer aisément.

1. J'appelle conjuguées d'une surface représentée par une équation

$$f(x, y, z) = 0$$

les lieux des points

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad y_1 = \alpha' + \beta', \qquad z_1 = \alpha'' + \beta''$$

correspondant à toutes les solutions

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \qquad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1}$$

de l'équation proposée, où les parties imaginaires β, β' et β'' seraient comme des constantes

$$C, \quad C' \quad \text{et} \quad C'',$$

c'est-à-dire, telles que

$$\frac{\beta}{C} = \frac{\beta'}{C'} = \frac{\beta''}{C''}.$$

2. La situation dans l'espace du point $[x_1, y_1, z_1]$, qui représente une solution imaginaire, reste la même quelle que soit la transformation de coordonnées qu'on fasse subir au lieu considéré et, par suite, à la solution représentée.

En effet, si les formules de transformation, résolues par rapport aux nouvelles coordonnées, sont

$$\begin{aligned} x' &= a + mx + ny + pz, \\ y' &= a' + m'x + n'y + p'z, \\ z' &= a'' + m''x + n''y + p''z, \end{aligned}$$

les valeurs des nouvelles coordonnées x', y', z' qui correspondent à

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \qquad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1}$$

sont

$$\begin{aligned} x' &= a + m\alpha + n\alpha' + p\alpha'' + (m\beta + n\beta' + p\beta'')\sqrt{-1}, \\ y' &= a' + m'\alpha + n'\alpha' + p'\alpha'' + (m'\beta + n'\beta' + p'\beta'')\sqrt{-1}, \\ z' &= a'' + m''\alpha + n''\alpha' + p''\alpha'' + (m''\beta + n''\beta' + p''\beta'')\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

de sorte que les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point représentatif de la première solution étant

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad y_1 = \alpha' + \beta', \qquad z_1 = \alpha'' + \beta''$$

et les coordonnées x'_1, y'_1, z'_1 du point représentatif de la seconde solution étant

$$\begin{aligned} x'_1 &= a + m\ (\alpha + \beta) + n\ (\alpha' + \beta') + p\ (\alpha'' + \beta''), \\ y'_1 &= a' + m'(\alpha + \beta) + n'(\alpha' + \beta') + p'(\alpha'' + \beta''), \\ z'_1 &= a'' + m''(\alpha + \beta) + n''(\alpha' + \beta') + p''(\alpha'' + \beta'') \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x'_1 &= a + mx_1 + ny_1 + pz_1, \\ y'_1 &= a' + m'x_1 + n'y_1 + p'z_1, \\ z'_1 &= a'' + m''x_1 + n''y_1 + p''z_1, \end{aligned}$$

il est clair que les deux points (x_1, y_1, z_1) et (x'_1, y'_1, z'_1) coïncident, puisque leurs coordonnées sont reliées entre elles par les formules de la transformation effectuée.

Le mode de construction adopté, pour obtenir les coordonnées du point représentatif d'une solution, est d'ailleurs le seul qui assure la fixité dans l'espace de ce point, puisque, par exemple, pour assurer la fixité du point dans l'espace, il faudrait, au moins, assurer celle de sa projection sur le plan des xy, si l'on ne faisait changer que les directions des axes des x et des y, dans l'ancien plan des xy et que, pour cela, il faudrait, d'après ce qu'on a vu en Géométrie plane, représenter la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

par le point

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad y_1 = \alpha' + \beta'.$$

3. Une droite réelle

$$\frac{x-d}{C} = \frac{y-d'}{C'} = \frac{z-d''}{C''}$$

n'est capable que de solutions du système $[C, C', C'']$; de sorte que la conjuguée $[C, C', C'']$ d'un lieu $f(x, y, z) = 0$ est le lieu des intersections idéales, réalisées, de ce lieu et de la suite des droites représentées par les équations $\frac{x-d}{C} = \frac{y-d'}{C'} = \frac{z-d''}{C''}$, où d, d' et d'' seraient variables à volonté.

Ces droites sont les *cordes réelles* de la conjuguée, elles joignent deux à deux ses points imaginaires conjugués.

4. En rendant l'un des axes de coordonnées parallèle aux cordes réelles d'une conjuguée, on rendrait en même temps réelles les deux autres coordonnées de tous ses points.

5. Il en résulte que, par un choix convenable d'axes, on peut toujours ramener l'ordonnée z, par exemple, d'une conjuguée à être une fonction de deux autres variables x et y, réelles.

6. Les conjuguées d'une surface réelle lui sont généralement inscrites ou circonscrites et la courbe de contact, pour chacune d'elles, est la courbe de contact avec la même surface réelle du cylindre qui lui serait circonscrit parallèlement aux cordes réelles de la conjuguée en question. Une surface réelle est donc l'enveloppe de ses conjuguées.

Les conjuguées d'un cône réel sont les cônes, de même sommet, ayant pour directrices, dans un plan quelconque, les conjuguées de la section du cône par ce plan.

Les conjuguées d'un cylindre réel sont les cylindres ayant pour directrices, dans un plan quelconque, les conjuguées de la section du cylindre par ce plan et leurs génératrices parallèles à celles du cylindre proposé.

7. Les conjuguées des surfaces du second degré sont d'autres surfaces du second degré, aisées à définir dans tous les cas.

8. Les conjuguées d'un lieu $f(X, Y, Z) = 0$ ont généralement une seconde enveloppe imaginaire, lieu des points du lieu où les rapports deux à deux des trois dérivées partielles f'_x, f'_y, f''_z sont réels.

En effet, les éléments du lieu $f(X, Y, Z) = 0$ aux environs d'un de ses points $(x, y; z)$ sont définis par l'équation

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx - \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$$

ou

$$dz = -\frac{f'_x}{f'_z} dx - \frac{f'_y}{f'_z} dy,$$

c'est-à-dire

$$dz = (m + n\sqrt{-1})\, dx + (p + q\sqrt{-1})\, dy,$$

si $m + n\sqrt{-1}$ et $p + q\sqrt{-1}$ sont respectivement les valeurs de $-\frac{f'_x}{f'_z}$ et $\frac{f'_y}{f'_z}$, au point (x, y, z).

Si l'on fait

$$dx = d\alpha + d\beta\sqrt{-1},$$
$$dy = d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1},$$
$$dz = d\alpha'' + d\beta''\sqrt{-1},$$

l'équation précédente donne

$$d\alpha'' = m\, d\alpha - n\, d\beta + p\, d\alpha' - q\, d\beta'$$

et

$$d\beta'' = m\, d\beta + n\, d\alpha + p\, d\beta' + q\, d\alpha':$$

d'où

$$d\alpha'' + d\beta'' = (m+n)\,d\alpha + (m-n)\,d\beta + (p+q)\,d\alpha' + (p-q)\,d\beta',$$

c'est-à-dire

$$dz_1 = \frac{(m+n)\,d\alpha + (m-n)\,d\beta}{d\alpha + d\beta}\,dx_1 + \frac{(p-q)\,d\alpha' + (p-q)\,d\beta'}{d\alpha' + d\beta'}\,dy_1$$

ou encore

$$dz_1 = \frac{m+n+(m-n)\dfrac{d\beta}{d\alpha}}{1+\dfrac{d\beta}{d\alpha}}\,dx_1 + \frac{p+q+(p-q)\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}}{1+\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}}\,dy_1.$$

Pour que le point $[x, y, z]$ appartînt à l'enveloppe des conjuguées, il faudrait que tous ces éléments fussent compris dans un même plan, qui serait le plan tangent à l'enveloppe au point $[x, y, z]$; pour cela, il faudrait que dz_1 ne dépendît que de dx_1 et de dy_1, et, par conséquent, fût indépendant de $\frac{d\beta}{d\alpha}$ et de $\frac{d\beta'}{d\alpha'}$. Cela exigerait les deux conditions

$$\frac{m+n}{1} = \frac{m-n}{1} \quad \text{et} \quad \frac{p+q}{1} = \frac{p-q}{1},$$

c'est-à-dire $n = 0$ et $q = 0$.

Ainsi, tout point de l'une ou l'autre enveloppe est nécessairement tel qu'en ce point

$$\frac{f'_x}{f'_z} \quad \text{et} \quad \frac{f'_y}{f'_z}$$

soient réels.

Mais chaque conjuguée ne touche l'enveloppe imaginaire qu'en quelques points et non plus suivant une courbe. En effet, les solutions des trois équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \frac{f'_x}{f'_z} = \text{réel}, \qquad \frac{f'_y}{f'_z} = \text{réel},$$

où l'on ferait $x = \alpha + \beta C\sqrt{-1}$, $y = \alpha' + \beta C'\sqrt{-1}$, $z = \alpha'' + \beta C''\sqrt{-1}$, seraient déterminées, puisque α, α', α'' et β seraient liés entre eux par quatre conditions.

Exemples. — L'enveloppe imaginaire des conjuguées ellipsoïdales d'un hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

est l'hyperboloïde à deux nappes supplémentaires

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

lequel est fourni par les solutions de la forme

$$x = \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \beta'\sqrt{-1}, \qquad z = \beta''\sqrt{-1}$$

de l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

L'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu

$$(x - a - b\sqrt{-1})^2 + (y - a' - b'\sqrt{-1})^2 + (z - a'' - b''\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

est la sphère

$$(x - a - b)^2 + (y - a' - b')^2 + (z - a'' - b'')^2 = (r + r')^2.$$

9. Les conjuguées du lieu

$$(M + N\sqrt{-1})x + (P + Q\sqrt{-1})y + (R + S\sqrt{-1})z + D + E\sqrt{-1} = 0$$

sont tous les plans qui passent par la droite représentée par les équations

$$Mx + Py + Rz + D = 0 \qquad \text{et} \qquad Nx + Qy + Sz + E = 0.$$

10. Un plan réel ne peut couper que les conjuguées dont les cordes réelles lui sont parallèles.

(*A suivre.*)