Marchand

Remarques sur le même problème

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 269-276

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__269_1>

REMARQUES SUR LE MÊME PROBLÈME ;

PAR M. MARCHAND,
Professeur au lycée de Versailles.

I.

La méthode des caractéristiques de Chasles permet de retrouver tous les résultats géométriquement et de se rendre compte du degré de difficulté de quelques-uns des problèmes les plus simples que l'on peut se proposer sur les coniques S. Je m'appuierai sur ces résultats connus : « Lorsque, dans un système de coniques satisfaisant à quatre conditions, il y a μ coniques qui passent par un point donné, et ν qui touchent une droite donnée, on dit que μ et ν sont les caractéristiques du système. Le lieu du pôle d'une droite donnée par rapport à un système dont les caractéristiques sont μ et ν est une courbe de l'ordre ν. Si l'on examine, en effet, en combien de points ce lieu peut couper la droite donnée, on voit qu'il ne peut la rencontrer qu'autant que cette droite contient son pôle, c'est-à-dire qu'autant que cette droite est tangente à l'une des coniques du système; et comme, par hypothèse, ce contact ne peut se produire que dans ν cas, le lieu est du degré ν. » (G. SALMON, *Sections coniques;* 2[e] édition, p. 670 et 671.)

On est ramené à déterminer la caractéristique ν des coniques S. Si l'angle ω est quelconque, il suffit de chercher combien il y a de coniques tangentes à une droite quelconque PQ passant par le point P. On voit qu'il y en a deux, tangentes respectivement à BC, CA, AB, PQ et à l'une des deux droites passant par P et faisant un angle ω avec PQ. La caractéristique est 2; le lieu du centre est une conique S. On trouve aussitôt six points de cette conique, savoir les six points de rencontre avec les trois côtés du triangle DEF obtenu en joignant les milieux des côtés du triangle ABC. En effet, une conique S ne peut se réduire à deux points que si l'un de ses points est un des sommets du triangle ABC, par exemple A; en joignant alors PA et menant par P les deux droites qui font un angle ω avec PA de part et d'autre, on obtiendra deux points A_1 et A_2 situés sur BC, et chacun d'eux associé avec A donnera une conique satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Les intersections de AA_1 et de AA_2 avec EF sont deux points du lieu.

Si l'angle est droit, les deux droites faisant de part et d'autre un angle droit avec PQ se confondent. La caractéristique est 1; le lieu du centre est une droite Δ; on construit, comme il a été dit précédemment, ses intersections avec les trois côtés du triangle DEF.

Enfin, si l'angle ω devient nul, on est ramené au lieu des centres des coniques inscrites à ABC et passant par P. Il semble qu'il n'y ait qu'une conique inscrite au triangle ABC et tangente à une droite PQ en P; mais ici encore la caractéristique reste égale à deux, comme on le voit en prenant au lieu de PQ une droite quelconque H ne passant pas par P; il y a en effet deux coniques tangentes à quatre droites BC, CA, AB, H et passant par un point donné P. Considérant l'angle nul comme la limite d'un angle ω quelconque, on voit que les deux points de rencontre du lieu du centre avec EF viennent se confondre au point de rencontre de PA et de EF. Donc le lieu Γ du centre relatif à un angle nul est une conique inscrite au triangle DEF, qui se trouve déterminée par trois points et les trois tangentes en ces points.

Il est maintenant facile d'établir que toutes les coniques Σ lieux des centres sont bitangentes entre elles. En effet, appelons I et J les points circulaires; la droite PI faisant avec elle-même un angle indéterminé, le centre de la conique inscrite à ABC et tangente en P à PI appartiendra au lieu géométrique, quel que soit ω; de même pour PJ. Toutes les coniques Σ ont donc deux points communs et ces points sont nécessairement imaginaires; en effet, si le centre O de la conique ABCPI était réel, la conique aurait plus de quatre tangentes réelles, savoir : BC, CA, AB et les droites symétriques par rapport à O; elle serait réelle et le point de contact avec une tangente passant par I serait imaginaire, ce qui n'a pas lieu. Les coniques Σ ne peuvent avoir aucun autre point commun, car à un centre donné O correspond une seule conique inscrite à ABC, et par suite un angle ω bien déterminé. Alors deux coniques Σ étant deux coniques réelles qui n'ont en commun que deux points imaginaires conjugués sont nécessairement bitangentes, que l'angle soit quelconque, droit ou nul.

On peut dire que le lieu du centre est une conique bitangente à la conique fixe Γ aux points où cette conique est rencontrée par la droite fixe Δ. La droite Δ et la conique Γ ont été déterminées, mais il est facile de déterminer plus complètement la conique Γ. Si l'on mène une droite K parallèle à AB et équidistante de AB et du point P, cette droite sera tangente à la conique Γ et son point de contact avec Γ se déterminera facilement. En effet, pour que le centre d'une conique S soit sur la droite K, il faut que l'une des deux tangentes menées de P à S soit parallèle à AB; la seconde tangente sera l'une des deux droites qui passent par P et font avec AB des angles $+\omega$ et $-\omega$. A ces deux coniques correspondent deux centres situés sur K, qui se confondront en un seul lorsque l'angle ω deviendra nul, c'est-à-dire lorsque le lieu du centre sera la conique Γ. Donc Γ est tangente à K et le point de contact sera le centre d'une conique inscrite à ABC et tangente en P à une parallèle à AB; le cas particulier du théorème de Brianchon, relatif au quadrilatère circonscrit, donnera le point Q de contact avec AB; la droite QP rencontre K au point cherché. On a ainsi pour Γ six tangentes parallèles deux à deux avec leurs points de contact. On en tire aussitôt le centre, et, en appliquant la méthode de construction d'une conique par le théorème de Pascal, deux diamètres conjugués et, par suite, les axes.

Si le point P vient sur un des côtés du triangle ABC, sur BC pour préciser, on est ramené à trouver le lieu du centre des coniques de deux faisceaux tangentiels déterminés par BC, CA, AB et par les deux droites menées par P et faisant respectivement avec BC des angles $+\omega$ et $-\omega$. On a deux droites qui se confondent pour $\omega = 0$, de sorte que, la conique Γ se réduisant à une droite double, on peut toujours la considérer comme inscrite au triangle DEF.

II.

Il paraît bien facile de trouver la caractéristique μ : « $2\nu - \mu$ coniques du système se réduisent à un couple de droites et $5\mu - \nu$ à un couple de points (SALMON, p. 673). » Comme on a trouvé facilement qu'il y avait six coniques S se réduisant à deux points, $2\mu - \nu = 6$; d'où $\mu = 4$. Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\mu = 2$.

Pour me limiter, je me bornerai à chercher le degré du lieu des foyers des coniques S lequel dépend seulement de la caractéristique ν. « L'ordre du lieu des foyers des coniques du système (μ, ν) est 3ν, et le lieu passe par des points I et J qui sont d'ordre ν (*voir* SALMON, pour la démonstration, p. 671). »

Lorsque l'angle ω est quelconque le lieu des foyers des coniques S est d'ordre $3\nu = 6$. Une courbe d'ordre 6 est, en général, déterminée par vingt-sept points; il est facile d'obtenir, dans le cas actuel, un nombre supérieur de points. On sait d'abord que I et J sont deux points doubles. On voit aussi, en considérant comme plus haut les deux coniques AA_1 et AA_2 réduites à deux points, que les points A_1 et A_2 appartiennent au lieu géométrique et que le point A est un point double. Les tangentes au point double A s'obtiennent facilement comme limite de ce théorème : « Les tangentes menées d'un point à une conique ont mêmes bissectrices que les droites qui joignent ce point aux deux foyers. » Considérant la conique AA_1 comme la limite d'une conique qui s'aplatit de manière à se réduire à une droite, on voit que la tangente AA′ au point A au lieu du foyer doit faire avec AB le même angle que fait AA_1 avec AC, dans le sens convenable.

On a déjà cinq points doubles dont trois accompagnés de leurs tangentes, ce qui fait $15 + 6 = 21$ conditions; en outre, les six points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, ce qui fait vingt-sept conditions.

Enfin, si l'on considère la conique inscrite à ABC et tangente en P à PI, ses quatre foyers sont des points du lieu. De même, si l'on prend PJ, on aura quatre points du lieu, ce qui donnera en tout $27 + 8 = 35$ conditions.

Si l'on prend deux angles ω et ω' différents, on a deux courbes du sixième degré admettant en commun les cinq points doubles A, B, C, I, J ainsi que les huit points correspondant aux coniques ABC, PI et ABC, PJ. Ces courbes ne peuvent pas se rencontrer en un autre point Q, car toute conique, inscrite à ABC et admettant Q comme foyer, est déterminée par cinq tangentes et alors l'angle ω en résulte sans ambiguïté. Cela semble indiquer que les huit points communs donnés plus haut sont points de contact. En effet, deux courbes du sixième degré ont trente-six points communs et cinq points doubles, plus huit points simples avec leur tangente équivalant à $5 \times 4 + 2 \times 8 = 36$. Si $\omega = \omega'$, la démonstration semble indiquer que la courbe lieu des foyers ne peut admettre aucun point double en dehors de A, B, C, I, J.

On peut, comme dans la première question, déterminer les points de contact par les courbes particulières relatives à $\omega = 0$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Pour $\omega = 0$ le lieu est encore du sixième degré; mais A_1 et A_2 se confondant, le lieu admet BC comme tangente et, de plus, les deux tangentes au point double A se confondent. La courbe est tangente aux trois côtés du triangle ABC et admet les trois sommets du triangle comme points de rebroussement.

Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$ le lieu s'abaisse au degré 3, puisque $\nu = 1$; on a une cubique passant par ABC, y admettant des tangentes déterminées et rencontrant en outre les trois côtés du triangle ABC en trois points faciles à construire. Comme cette cubique passe par les points cycliques, elle est anallagmatique. Le raisonnement fait plus haut pour déterminer les points communs à deux lieux de foyers semble d'ailleurs établir qu'elle n'admet pas de point double, n'est jamais unicursale.

Enfin, si le point P vient sur un des côtés du triangle ABC, le lieu se décompose en deux points du troisième degré dont chacune est le lieu géométrique des foyers des coniques d'un faisceau tangentiel.

On obtiendrait une discussion du même genre en s'appuyant sur ce résultat connu : « Si l'on mène, d'un point fixe, toutes les tangentes possibles aux courbes d'un système (μ, ν), le lieu des points de contact de ces tangentes est une courbe de l'ordre $\mu + \nu$ ayant au point fixe un point multiple d'ordre μ. »

Il est à peine nécessaire de remarquer que, tout ce qui précède s'appliquant dès que $\nu = 2$, on obtiendrait de même le lieu des centres des coniques inscrites au triangle ABC et tangentes à deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques ayant même centre P. Si les rayons doubles de l'homographie sont réels, on aura des coniques bitangentes en deux points réels; au cas de l'angle droit correspond le cas de l'involution. Quand les rayons doubles de l'homographie sont réels, ils peuvent devenir parallèles à un ou deux côtés du triangle ABC, l'un d'eux pouvant même passer par un des sommets du triangle.

Pour terminer, je me bornerai à la remarque suivante : au lieu de rendre réels les points doubles de l'homographie, on peut rendre imaginaires deux côtés du triangle ABC et l'on est amené à étudier ce problème : lieu des centres et des foyers des coniques S admettant un point A comme foyer et une droite BC comme tangente. Par application du principe de correspondance de Chasles, on trouve facilement que le lieu du foyer devient alors une conique.