NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEMAIRE

Note sur la question précédente

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 267-269
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__267_1>

NOTE SUR LA QUESTION PRÉCÉDENTE;

PAR M. LEMAIRE.

Soit le triangle ABC, P un point de son plan, S une conique inscrite dans le triangle et vue du point P sous un angle droit $\widehat{DPE}$. Joignons PC; soit C_1 le point ou la perpendiculaire en P à cette droite coupe AB, et C_1B_1 la seconde tangente issue de C_1 à la conique.

Les trois couples de droites (PD, PE), (PC, PC_1), (PB, PB_1) forment une involution; les rayons de deux couples, étant rectangulaires, il en est de même des rayons PB et PB_1 du troisième couple. L'angle $\widehat{PBP_1}$ est donc droit, et la droite B_1C_1 fixe; cette droite passe d'ailleurs par le point A_1 de BC, tel que $\widehat{APA_1}$ soit droit.

Les coniques S sont donc inscrites dans un quadrilatère fixe.

Le lieu de leurs centres est, d'après le théorème de Newton, la droite qui joint les milieux des diagonales AA_1, BB_1, CC_1 de ce quadrilatère.

P est l'un des deux points communs aux cercles décrits sur ces diagonales comme diamètres.

L'autre point P′, commun à ces cercles, jouit de la même propriété que P.

En effet, les tangentes menées de P′ à la conique S forment, avec les deux couples de droites $(P'B, P'B_1)$ et $(P'C, P'C_1)$, une involution; les rayons de ces deux couples étant rectangulaires, il en est de même des rayons du troisième, c'est-à-dire des tangentes à S issues de P'.

Il est aisé de voir que, si P se déplace dans le plan du triangle, PP' passe par un point fixe.

En effet, soit B' le point commun au cercle BPB_1 et à AC, et C' le point commun au cercle CPC_1 et à AB.

BB' et CC' sont hauteurs du triangle ABC; soit I leur point commun.

BC' et B'C étant antiparallèles par rapport à l'angle I, on a

$$IB.IB' = IC.IC'.$$

Par conséquent I est sur l'axe radical des deux cercles.

Aussi PP' passe par le point de rencontre des hauteurs du triangle ABC.

On a d'ailleurs

$$IP.IP' = IB.IB' = \text{const.}$$

Si P décrit une courbe, P' décrira une transformée de cette courbe par rayons vecteurs réciproques.

Transformons la figure par polaires réciproques en prenant pour cercle directeur un cercle quelconque O.

Les coniques S se transforment en coniques S_1 passant par trois points fixes et déterminant sur une droite fixe P_1 un segment vu d'un point fixe O sous un angle droit.

Nous voyons donc que :

1° Les coniques S_1 passent par un quatrième point fixe.

2° Il existe une seconde droite P'_1 telle que les segments déterminés sur elle par les coniques S_1 soient vus de O sous un angle droit.

3° Si la droite P_1 se déplace, le point de rencontre de P_1 et de P'_1 décrit une droite fixe.

Remarque. — Si la droite P_1 est la droite de l'infini du plan, les coniques S_1 ne sont autre chose que les hyperboles équilatères passant par trois points fixes.

On retrouve la propriété de ces hyperboles de passer par un quatrième point fixe.